

Проекты

Хайнц Альбертович Шуманн

ЯРКИЕ ПРИМЕРЫ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ АНАЛОГИИ ТЕОРЕМ ГЕОМЕТРИИ ТРЕУГОЛЬНИКА

Изучение пространственных аналогий теорем и задач геометрии на плоскости с помощью пространственной динамической системы, например Cabri-3D, является интересной и познавательной темой. К сожалению, программа школьной геометрии, в которой изучается малое число пространственных фигур, ограничена Curriculum sprengt (учебным планом) [2] и не дает такой возможности. Следовательно, данная тема относится к внеклассным занятиям, например, к так называемым проектам.

1. ВВЕДЕНИЕ

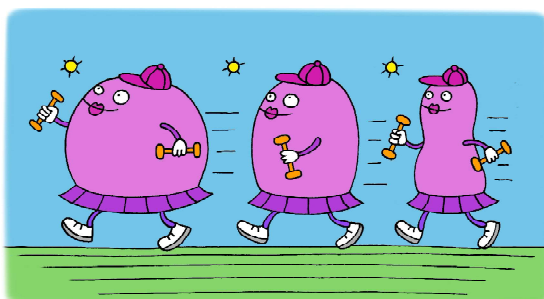
Утверждениям геометрии треугольника, связанным с длинами его сторон, соответствуют в геометрии тетраэдра две аналогии: одна из них связана с площадями боковых граней, другая – с ребрами тетраэдра. Мы применяем для исследований и доказательств свойств пространственных конструкций программу – прототип динамической пространственной системы. Правильность аналогичным образом представленных конструкций может быть эмпирически обоснована с помощью изменения фигуры в режиме реального времени. Эти высказывания, в соответствии с математическими стандартами, должны быть доказаны. Доказательства таких аналогий, сделанных с по-

мощью преобразований, часто можно найти или разработать аналогично доказательствам соответствующим утверждениям геометрии на плоскости. Далее представим первую пространственную аналогию известной теоремы геометрии треугольника:

Точки, симметричные ортоцентру H треугольника $A_1A_2A_3$ относительно его сторон, лежат на описанной вокруг него окружности с центром O (рис. 1).

2. ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ АНАЛОГИИ

Как уже было сказано выше, существуют два варианта аналогий, которые мы рассмотрим в дальнейшем. Для нахождения адекватных аналогий нам необходимо рассмотреть конструкцию ортоцентрического тетраэдра (тетраэдр, высоты которого пере-



*...изменения фигуры
в режиме реального времени...*

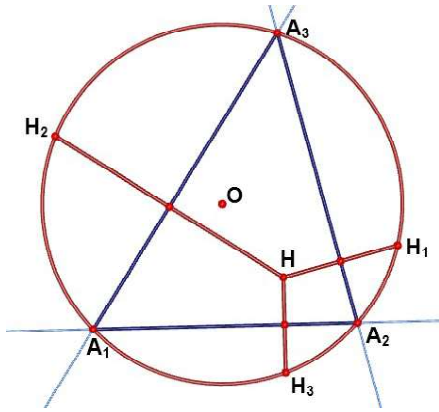


Рис. 1. Точки, симметричные ортоцентру треугольника, относительно его сторон, принадлежат его описанной окружности

секаются в одной точке). Для построения такого тетраэдра необходимо через высоты треугольника провести плоскости, перпендикулярные плоскости этого треугольника, и обозначить через A_4 их общую точку пересечения. Тогда тетраэдр $A_1A_2A_3A_4$ – это такой тетраэдр, у которого перпендикуляры, проведенные из его вершин к противоположным граням, пересекаются в одной точке H – ортоцентре этого тетраэдра.

2.1. Пространственная аналогия: отображение ортоцентра H относительно граней тетраэдра

Для первой пространственной аналогии мы выбираем отображение ортоцентра H тетраэдра $A_1A_2A_3A_4$ относительно его граней

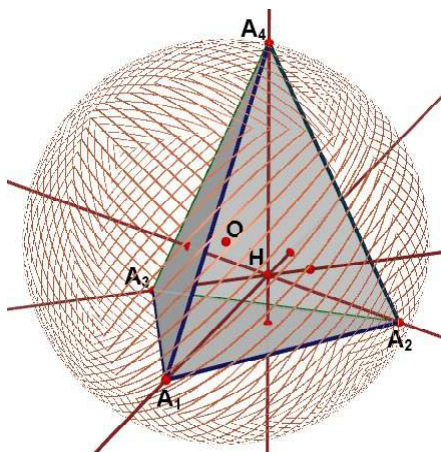


Рис. 2. Описанный шар ортоцентрического тетраэдра $A_1A_2A_3A_4$ с центром O и точкой пересечения высот H

или плоскостей, содержащих эти грани. С помощью конструирования и измерений мы находим утверждения, иллюстрируемые рис. 2–4:

В ортоцентрическом тетраэдре четыре точки H_1, H_2, H_3, H_4 , симметричные ортоцентру H относительно граней тетраэдра, лежат на шаре, описанном вокруг тетраэдра $H_1H_2H_3H_4$.

(1a) Центр шара O^* лежит на прямой Эйлера тетраэдра $A_1A_2A_3A_4$ и делит отрезок OH в отношении $1 : 2$ ($|OO^*| : |O^*H| = 1 : 2$).

(1b) Радиус описанного шара R^* тетраэдра $H_1H_2H_3H_4$ равен $2/3$ радиуса шара R тетраэдра $A_1A_2A_3A_4$.

2.2. Пространственная аналогия: отражение точки H относительно ребер тетраэдра

Отразим точку пересечения высот H ортоцентрического тетраэдра $A_1A_2A_3A_4$ относительно шести его ребер или относительно прямых, содержащих эти ребра. Получим

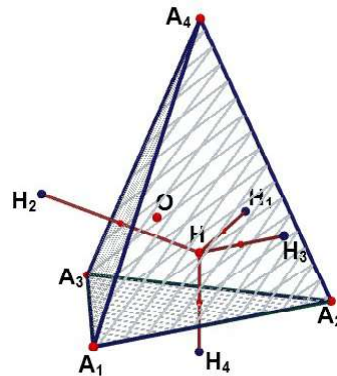


Рис. 3. Точки, симметричные ортоцентру H , относительно граней тетраэдра

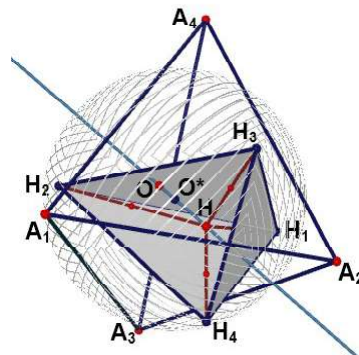


Рис. 4. Описанный шар тетраэдра $H_1H_2H_3H_4$ с центром O^* , расположенным на прямой Эйлера

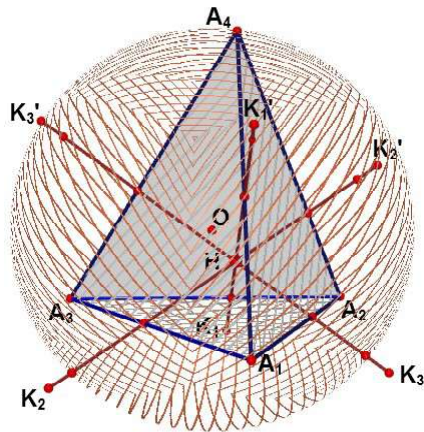


Рис. 5. Ортоцентрический тетраэдр $A_1A_2A_3A_4$ с описанным шаром и точками симметрии ортоцентра H относительно его рёбер

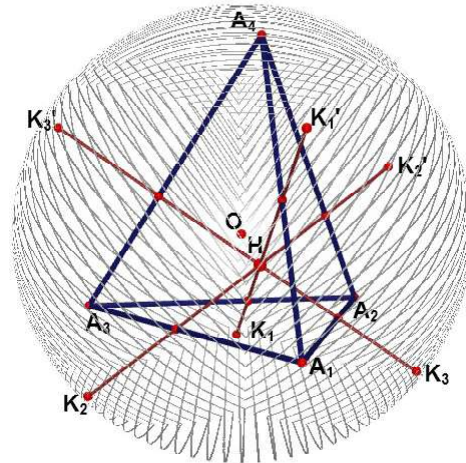


Рис. 6. Ортоцентрический тетраэдр $A_1A_2A_3A_4$ с описанным шаром, на котором расположены точки симметрии ортоцентра H относительно рёбер тетраэдра

следующие утверждения, иллюстрируемые рисунками 5–7.

(2а) Шесть точек $K_1, K_2, K_3, K_4', K_5', K_6'$ симметрии ортоцентра H относительно рёбер ортоцентрического тетраэдра, лежат на одном шаре.

(2б) Центр этого шара совпадает с центром O шара исходного тетраэдра.

(2с) Точки симметрии являются вершинами октаэдра, состоящего из треугольных граней, из которых четыре параллельны граням тетраэдра. Октаэдр образован двумя треугольными пирамидами с четырехугольными основаниями, диагонали которых пересекаются в точке H .

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЙ

Доказательство с помощью сфер, на которых лежат 12 точек симметрии первого и второго варианта [3], аналогично доказательству для окружности 9-ти точек треугольника.

Окружность 9-ти точек и причина ее применения при доказательстве аналогий

Основания высот, середины сторон и середины отрезков от вершин до ортоцентра лежат на окружности 9-ти точек (рис. 8 без обозначения точек пересечения окружности с высотами). Центр O_9 этой окружности принадлежит прямой Эйлера треуголь-

ника и делит отрезок HO пополам. Радиус этой окружности равен половине радиуса описанной окружности треугольника. Симметрия из точки H как из центра с коэффициентом 2 образует эту окружность, на которой лежат точки, симметричные ортоцентру H относительно сторон треугольника (рис. 9). Если центр O_9 отобразить на центр O , то окружность 9-ти точек перейдет в описанную окружность треугольника.

Пространственные аналогии окружности 9-ти точек и их обоснование

Основания перпендикуляров, проведенных из точки H к ребрам ортоцентрического тетраэдра, и середины его ребер, лежат

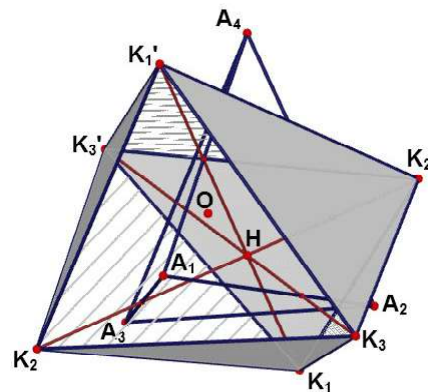


Рис. 7. Октаэдр $K_1K_2K_3K_1'K_2'K_3'$ с точками, симметричными относительно ребер, образованный двумя треугольными пирамидами с треугольными гранями

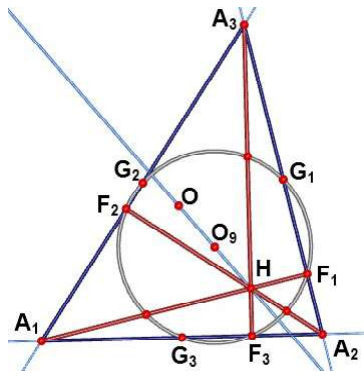


Рис. 8. Окружность 9-ти точек

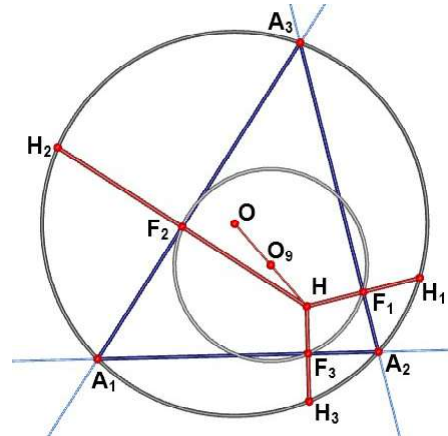
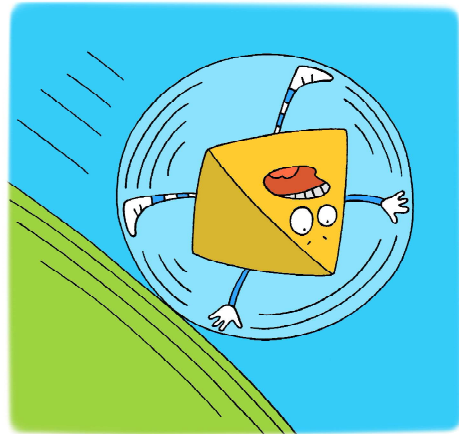


Рис. 9. Отрезки окружности 9-ти точек

на шаре 12 ти точек 1 го варианта (рис. 10). Это случай, когда центр тяжести тетраэдра G есть центр шара. Точка G принадлежит прямой Эйлера и делит отрезок OH пополам; диаметр шара соединяет середины двух противоположных ребер тетраэдра. Центральная симметрия этого шара с центром H и коэффициентом 2 образует новый шар, на котором должны лежать точки, симметричные точке H относительно рёбер тетраэдра (рис. 11). Центр этого шара совпадает с центром O описанного шара тетраэдра. Это значит, что данный шар расположен концентрически по отношению к описанному шару тетраэдра, и его диаметр равен удвоенному диаметру шара 12 ти точек 1-го варианта.

Основания высот, центры тяжести граней ортоцентрического тетраэдра 12 точек, лежат на поверхности шара 2-го варианта с центром O_{12} , который, в свою очередь, при-



Это случай когда центр тяжести тетраэдра G - центр шара.

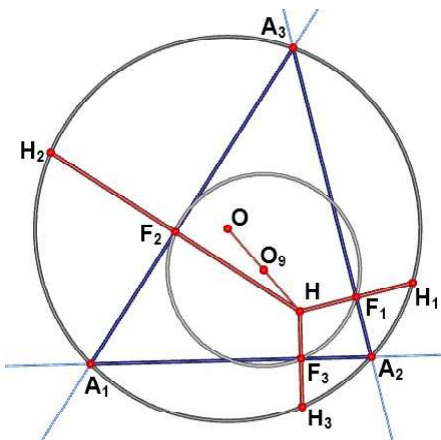


Рис. 10. Шар 12-точек, 1-вариант

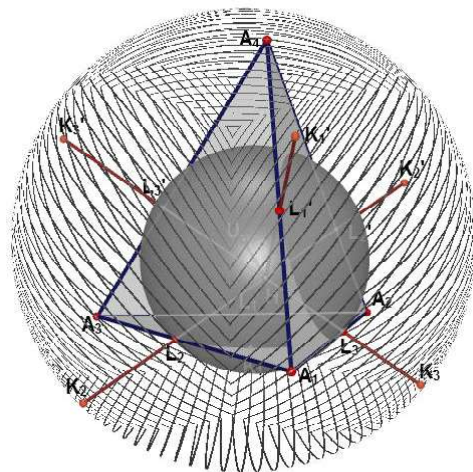


Рис. 11. Растяжение шара 12 - точек, 1-вариант с центром G

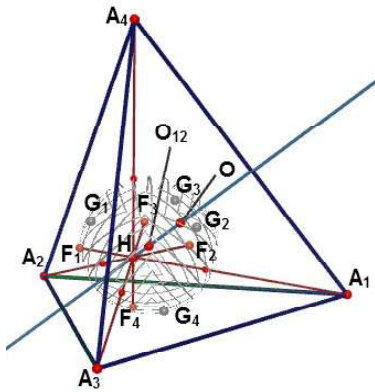


Рис. 12. Шар 12-точек 2-го варианта

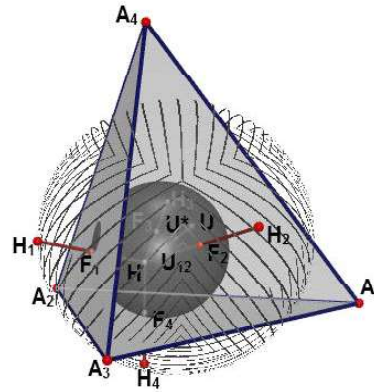


Рис. 13. Растяжение шара 12-точек 2-го варианта с центром O_{12}

надлежит прямой Эйлера и делит отрезок HO в отношении $1 : 3$ ($|HO_{12}| : |HO| = 1 : 3$). (рис. 12, точки пересечения высот с поверхностью шара не обозначены). Радиус этого шара равен одной третьей величины радиуса шара, описанного вокруг тетраэдра. Центральная симметрия шара 12-ти точек второго варианта с центром H и коэффициентом подобия 2 образует новый шар, на котором должны лежать точки, симметричные точке H относительно граней тетраэдра (рис. 13, шар не показан). Центр O^* этого шара как отображение центра O_{12} расположен на прямой Эйлера и делит отрезок HO в отношении $2 : 3$. Радиус этого шара вдвое больше радиуса шара 12-ти точек второго варианта, то есть он равен $2/3$ радиуса, описанного вокруг тетраэдра шара.

Доказательство утверждения (2с)

Октаэдр из 6-ти точек симметрии ортоцентра H относительно ребер тетраэдра также может быть построен как результат центральной симметрии с центром H треугольников, образованных основаниями высот и коэффициентом подобия 2 (рис. 14). Следовательно, этот октаэдр состоит из восьми треугольных граней, из которых четыре параллельны соответствующим граням тетраэдра.

Точки, симметричные относительно противоположных ребер, лежат на прямой, проходящей через H , так как основания высот ортоцентрического тетраэдра одновременно являются точками пересечения высот гра-

ней. Они пересекают соответствующие плоскости, в которых лежат эти высоты (рис. 16, плоскость $A_4A_1L_1$ пересекает плоскость $A_2A_3L_1'$). Каждые два отрезка, соединяющие точки симметрии относительно противоположных ребер тетраэдра, являются диагоналями оснований четырехугольных пирамид ($K_1K_2'K_1'K_2$, $K_2K_3K_2'K_3$, $K_3K_1K_3'K_1$) трех двойных пирамид октаэдра (рис. 15).

Примечания:

1) Для понимания и видения печатных изображений трехмерных пространственных фигур необходимо обладать хорошим пространственным воображением. С помощью же системы динамической пространственной геометрии имеется возможность

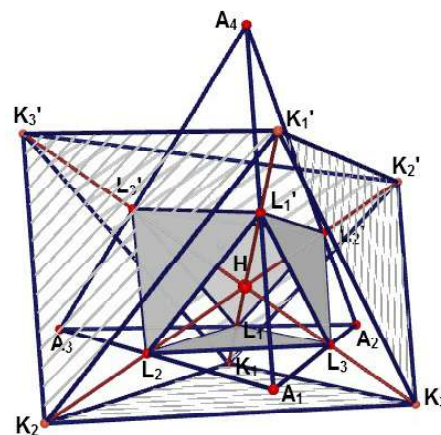


Рис. 14. Конструкция октаэдра с помощью центральной симметрии треугольника, вершинами которого являются основания высот, проведенные к ребрам

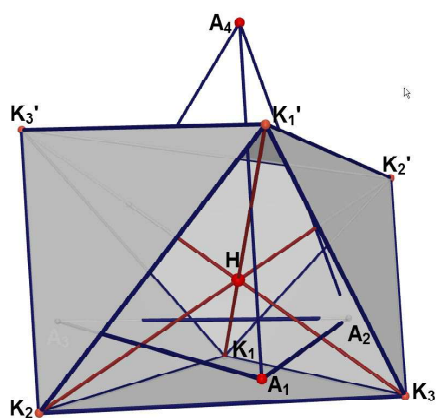


Рис. 15. Октаэдр как двойная треугольная пирамида с треугольными гранями

всесторонне изучить данную фигуру, а также увеличить или уменьшить ее изображение.

2) В случае невозможности нахождения аналогии для пространственного доказательства возникает проблема между конструктивным, эмпирическим познанием и теоретическими пояснениями. Несоответствие между нахождением утверждений и их объяснениями имеет соответствующие последствия для обучения геометрии, ориентированного на свободное исследование: каким образом возможно сохранить традиционный стандарт формирования геометрических знаний, даже несмотря на то, что учитель не знает или не может привести доказательства найденных утверждений?

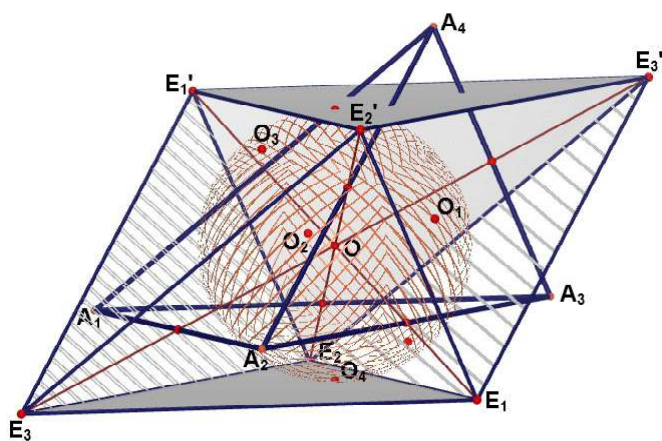


Рис. 17. Равногранный тетраэдр, построенный из ребер и точек, симметричных центру шара относительно его граней

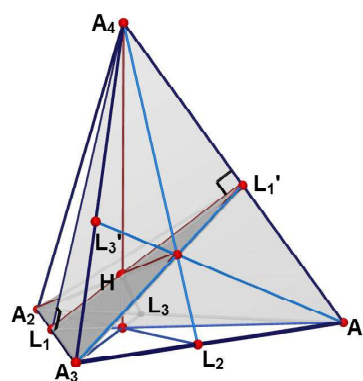


Рис. 16. Основания перпендикуляров, проведенных из точки H на противоположные ребра

4. ПОСЛЕСЛОВИЕ

Дальнейшие пространственные аналогии возможны, если, например, центр описанной окружности треугольника отобразить относительно его сторон или центр описанного шара тетраэдра отобразить относительно его ребер, а также его граней. В результате мы получим для произвольного тетраэдра:

Если отобразить центр описанного шара тетраэдра относительно его ребер, то полученные точки будут вершинами октаэдра с треугольными гранями. Каждые две противоположные грани октаэдра являются центрально симметричными по отношению друг к другу, и одна из этих граней является параллельным переносом соответствующей грани тетраэдра. Октаэдр представляет собой треугольную четырехгранную двойную пирамиду, основания которых параллелограммы.

Это утверждение для равногранного тетраэдра – тетраэдра с конгруэнтными треугольными гранями претерпевает некоторые изменения:

Если отобразить центр шара O равногранного тетраэдра $A_1A_2A_3A_4$ относительно его ребер (рис. 17), то точки симмет-

рии $E_1, E_2, E_3, E'_1, E'_2, E'_3$ являются вершинами равногранного октаэдра, грани которого конгруэнтны граням тетраэдра. Октаэдр представляет собой треугольную четырехгранную двойную пирамиду ос-

нования, которых ромбы. Точки симметрии O_1, O_2, O_3 и O_4 центра описанного шара относительно граней тетраэдра являются точками касания вписанного шара октаэдра.

Литература

1. *Bainville E., Laborde J.-M.* (2004–2015): Cabri 3D 2.1, Grenoble: www.cabri.com
2. *Schumann H.* (2007): Schulgeometrie im virtuellen Handlungsraum. Hildesheim: Franzbecker.
3. *Schumann H.* (2011): Elementare Tetraedergeometrie. Hildesheim: Franzbecker

Prof. Dr. Heinz Schumann
Senior lecturer for mathematics and
its didactics, Faculty II,
Mathematics University of Education
Weingarten, Germany
schumann@ph-weingarten.de

