Богомолова Ольга Борисовна,
Усенков Дмитрий Юрьевич

КОМБИНАТОРИКА – НА СЛОВАХ, И НЕ ТОЛЬКО

Задания «со словами», которые в ЕГЭ числятся под номером 10, давно уже «прописались» на экзамене. Составители КИМов то «забывают» о них на время, то вдруг вспоминают, и старые и привычные, казалось бы, задачки возвращаются вновь в новом обличии – уже с изменениями и нюансами, которые ставят учеников в тупик. А раз так – придется и нам вспомнить про эти задачи.

Условно можно разделить их на две большие группы: на «списки слов» и на перестановку букв в слове. При этом, что интересно, эти две группы заданий, встречающиеся в ЕГЭ под одним и тем же номером (и, соответственно, взаимоисключающие), проверяют совсем разные области знаний: в первом случае затрагивается тема «Системы счисления», а во втором – комбинаторика, то есть вообще область не из информатики, а из математики.

ЗАДАЧИ НА «СПИСКИ СЛОВ»

Общий смысл таких заданий: имеется список «слов» (точнее, просто наборов букв, не обязательно осмысленных), расположенных по порядку и состоящих из некоторого небольшого количества букв. И список этих «слов» такой, что в нем сразу угадывается последовательность чисел в некоторой системе счисления, а в буквах, соответственно, – цифры. А дальше (в том, что требуется в задании искать) – есть нюансы…

Начнем со сравнительно простой задачи – такой, какие встречались в ЕГЭ раньше.

Задача 1. Все 5-буквенные слова, составленные из букв **Т**, **О**, **Н**, записаны в алфавитном порядке и пронумерованы. Вот начало списка:

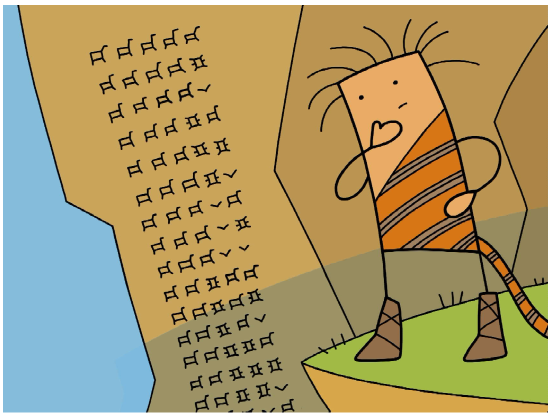
1. **ННННН**
2. **ННННО**
3. **ННННТ**
4. **НННОН**

……

Запишите слово, которое стоит под номером 123.

Решение

Как уже было отмечено выше, в приведенном выше списке «слов» легко можно увидеть пятизначные числа, в которых заданные буквы являются «цифрами». При этом,



...в приведенном выше списке «слов» легко можно увидеть пятизначные числа...

поскольку букв у нас всего три, речь идет о *троичной системе счисления* (с основанием 3). Тогда, исходя из приведенного списка, можно установить соответствие букв цифрам: «**Н**» = **0**, «**О**» = **1**, «**Т**» = **2**, а список «слов» в этом случае эквивалентен следующей последовательности чисел:

1. **ННННН**	1. **00000**
2. **ННННО**	2. **00001**
3. **ННННТ**	3. **00002**
4. **НННОН**	4. **00010**
……	……

Нетрудно заметить, что числа начинаются с нуля, а их порядковые номера – с единицы. То есть порядковый номер любого числа равен самому числу плюс единица.

Тогда вполне очевидно, что под номером 123 должно стоять число (в десятичном представлении) 122. Остается перевести его в троичную систему счисления (последовательными делениями на 3 с выделением остатков – операция, школьникам хорошо известная), а затем полученное троичное число 11112 переписать в «слово» в соответствии с цифровыми обозначениями букв: **ООООТ.**

Ответ: ООООТ.

Как видим, задачка вполне очевидная и нетрудная. Наверное, поэтому в задания ЕГЭ ее в таком виде больше не включают (разве что, может быть, скоро мы увидим ее на ОГЭ), равно как и «обратную» модификацию, когда задано «слово» и надо найти его порядковый номер в списке. Ну, неинтересно разработчикам КИМов, когда детям легко решать задачки! Поэтому теперь в таких заданиях вопросики посложнее.

Задача 2. Мальчик составляет список из 5-буквенных слов, в состав которых входят только буквы **И**, **О**, **Я**. Петя расположил слова в **обратном** алфавитном порядке. Вот начало списка:

1. **ЯЯЯЯЯ**
2. **ЯЯЯЯО**
3. **ЯЯЯЯИ**
4. **ЯЯЯОЯ**

……

Запишите слово, которое стоит в этом списке под номером 100.

Решение

1. Три буквы – значит, снова троичная система счисления.

2. Из того, что порядок сортировки «слов» обратный алфавитному, заключаем, что **«Я» = 2**, **«О» = 1**, **«И» = 0.** Тогда можно выстроить следующее соответствие исходного списка «слов» троичным, а далее – десятичным числам:

1. **ЯЯЯЯЯ**	1. **22222**	1. $\mathbf{242_{10}}$
2. **ЯЯЯЯО**	2. **22221**	2. $\mathbf{241_{10}}$
3. **ЯЯЯЯИ**	3. **22220**	3. $\mathbf{240_{10}}$
4. **ЯЯЯОЯ**	4. **22212**	4. $\mathbf{239_{10}}$
……	……	……

(Не пугаемся вычислений! Найти первое число просто: оно равно $100000_3 - 1 = 3^5 - 1 = 243 - 1 = 242$, а далее десятичные числа уменьшаются каждый раз на единицу.)

3. Учитывая соотношение порядковых номеров и чисел: № 1 – 242, № 2 – 241 …, можно заметить закономерность: число в ***n***-й позиции равно **243 –** ***n***. Тогда под номером 100 будет стоять число $(243 - 100) = 143_{10}$.

4. Переводим это число в троичную систему и получаем число 12022_3. Остается переписать его в виде «слова» и получить ответ: **ОЯИЯЯ**.

Ответ: ОЯИЯЯ.

Порядок «слов», обратный алфавитному, – это первый «нюанс», любезно приготовленный для вас, дети, дядями и тетями из ФИПИ. Но – не единственный.

Задача 3. Все четырёхбуквенные слова, составленные из букв К, О, С, А, записаны в алфавитном порядке и пронумерованы, начиная с 1. Начало списка выглядит так:

1. **АААА**
2. **АААК**
3. **АААО**
4. **АААС**
5. **ААКА**

……

Под каким номером в списке идёт первое слово, в котором нет буквы А?

Решение

Здесь порядок «слов» (и, соответственно, чисел) обычный, по возрастанию, но зато есть «нюанс» в вопросе нам надо искать первое слово, в котором нет буквы «А». Хотя вовсе не гарантировано, что в ЕГЭ не встретятся задачи, где есть сразу оба этих «нюанса».

1. Имеется 4 буквы – следовательно, у нас четверичная система счисления, где «А» = 0, «К» = 1, «О» = 2, «С» = 3.

2. *Первое слово по алфавиту без буквы «А» – это первое число без нуля.* То есть – четверичное 1111. Переводим его в десятичную систему счисления: $1111_4 = 4^3 + 4^2 + 4 + 1 =$ $= 85$.

3. Число 0000 стоит в списке под порядковым номером 1, следовательно (как и в первой задаче) номер места на 1 больше самого числа. Тогда число 1111 (и, соответственно, первое слово без «А») стоит в списке на 86-м месте.

Ответ: 86.

Задача 4. Все четырёхбуквенные слова, составленные из букв А, Л, Г, О, Р, И, Т, М записаны в алфавитном порядке и пронумерованы, начиная с 1. Начало списка выглядит так:

1. **АААА**
2. **АААГ**
3. **АААИ**
4. **АААЛ**
5. **АААМ**
6. **АААО**
7. **АААР**
8. **АААТ**
9. **ААГА**

……

Под каким номером в списке идёт последнее слово, которое заканчивается на ГОЛ?

Решение

1. Всего имеется 8 букв – значит, на этот раз у нас аналог восьмеричной системы счисления. Соответственно, «А» = 0, «Г» = 1, «И» = 2, «Л» = 3, «М» = 4, «О» = 5, «Р» = 6, «Т» = 7. А список слов превращается в список чисел от 0000 до 7777.

2. Последнее слово, которое кончается на ГОЛ, эквивалентно последнему числу, кончающемуся на 153. Первая же цифра для последнего по порядку числа должна быть наибольшей из возможных, то есть 7. Следовательно, искомое число – 7153.

3. Восьмеричное 7153 равно десятичному: $7 \cdot 8^3 + 8^2 + 5 \cdot 8 + 3 = 3691$.

4) Если число 0000 имеет порядковый номер 1, то номер места на 1 больше, чем число. Тогда число 3691 (равно как и последнее слово, кончающееся на ГОЛ) записано в списке под номером 3692.

Ответ: 3692.

Думается, рассмотренных задачек уже достаточно, чтобы уловить принцип их решения и быть готовым если не ко всем возможным, то к большинству подобных задач. Мы же перейдем к гораздо более сложным заданиям с элементами комбинаторики. Однако сначала имеет смысл повторить саму тему «Комбинаторика» и разобрать основные формулы комбинаторики – тем более, что их описание чаще всего выполняется языком, далеко не понятным учащимся школы.

КОМБИНАТОРИКА – ПОНЯТНЫМ ЯЗЫКОМ

Комбинаторика – это раздел математики, который занимается задачами выбора и расположения элементов из некоторого множества в соответствии с заданными правилами, так что совершенно не понятно, почему раздел математики проверяется на ЕГЭ по информатике, а не собственно по математике.

Пусть имеется множество («алфавит») из *n* объектов. Для наглядности возьмем множество из трех цифр: {**1**, **2**, **3**}.

Формулы комбинаторики определяют количества возможных комбинаций этих элементов между собой.

1. ПЕРЕСТАНОВКИ

Берутся ***все*** *n* элементов исходного множества, меняется лишь порядок их следования друг за другом.

В нашем случае – составляются «слова» из всех трех элементов исходного множества:

{1, 2, 3}
{1, 3, 2}
{2, 1, 3}
{2, 3, 1}
{3, 1, 2}
{3, 2, 1}

Количество неповторяющихся вариантов перестановки в этом случае определяется формулой:

$$P_n = n\,!,$$

где ! – обозначение факториала ($n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$).

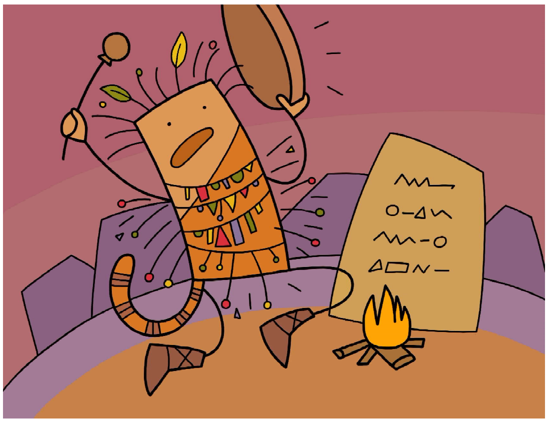
В нашем примере оно равно **3! = 6**.

> **Типичные задачи:**
>
> 1. Сколько пятизначных слов можно составить из букв слова БОТВА, если каждую букву можно использовать только один раз?
>
> 2. В арсенале мага – 4 разных заклинания, он может использовать каждое только один раз. Сколько «комбо» (сочетаний) из четверок заклинаний он может составить?

2. РАЗМЕЩЕНИЯ

Из исходного множества («алфавита» из n элементов) берется только m каких-то элементов, и выполняются различные перестановки только этого количества элементов. При этом рассматриваются ***все*** возможные способы выборки такого количества элементов из исходного множества.

Например, когда из исходного множества из $n = 3$ цифр: {1, 2, 3} берутся подмножества



В арсенале мага – 4 разных заклинания...

из $m = 2$ цифр: {1, 2}, {1, 3} и {2, 3}, мы получаем следующую подборку комбинаций:

{1, 2}
{2, 1}
{1, 3}
{3, 1}
{2, 3}
{3, 2}

Количество различных возможных вариантов таких комбинаций элементов вычисляется по формуле:

$$A_n^m = \frac{n\,!}{(n-m)!}\,.$$

В нашем случае оно равно:

$$\frac{3\,!}{(3-2)!} = \frac{3\,!}{1!} = 6\,.$$

> **Типичные задачи:**
>
> 1. Сколько трехзначных слов можно составить из букв слова ЛОГАРИФМ, если каждую букву можно использовать только один раз?
>
> 2. В арсенале мага – 8 разных заклинаний, он может использовать каждое только один раз. Сколько тройных «комбо» (сочетаний) он может составить из этих заклинаний?

3. СОЧЕТАНИЯ

Из исходного множества («алфавита» из n элементов) берется m каких-то элементов, но в пределах каждого такого способа выборки никакие перестановки не производятся – то есть нас интересуют не все возможные способы перестановок, а только лишь количество возможных подмножеств (порядок следования элементов в каждом подмножестве не важен).

Например, если из исходного множества из $n = 3$ цифр: {1, 2, 3} берутся подмножества из $m = 2$ цифр: {1, 2}, {1, 3} и {2, 3}. Варианты же {2, 1}, {3, 1} и {3, 2} считаются совпадающими с предыдущими:

{1, 2} ≡ {2, 1},
{1, 3} ≡ {3, 1},
{2, 3} ≡ {3, 2}.

Количество возможных таких сочетаний

$$C_n^m = \frac{n!}{(n-m)!\cdot m!}\,.$$

В нашем случае оно равно:

$$\frac{3!}{(3-2)!\cdot 2!}=\frac{3!}{2!}=3.$$

Очевидно, что если в каждом полученном таким образом сочетании мы начнем учитывать возможные перестановки, то придем к ***размещениям***. При этом количество всех возможных комбинаций перестановок в каждом из сочетаний равно произведению числа сочетаний на число перестановок

$$A_n^m = C_n^m \cdot P_m .$$

Типичные задачи:

1. В корзине лежат: яблоко, груша, слива, мандарин, апельсин и айва. Сколько из них можно составить наборов из трех любых фруктов?

2. В классе 12 детей. Команда для игры в пионербол состоит из 6 игроков (играть могут как мальчики, так и девочки). Сколько можно составить различных команд из детей этого класса?

4. ПЕРЕСТАНОВКИ С ПОВТОРЕНИЯМИ

Пусть исходное множество может, кроме уникальных, неповторяющихся, содержать какие-то одинаковые элементы, например:

{1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3}.

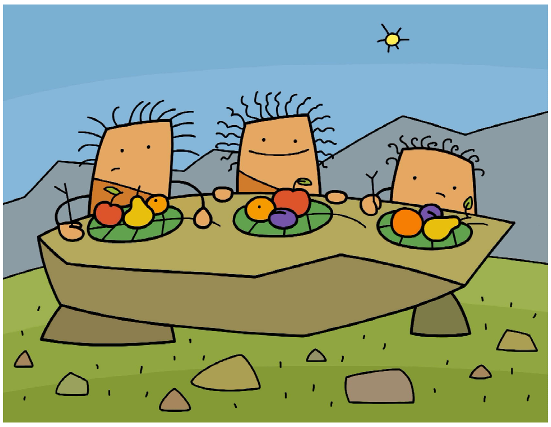
Тогда при всех возможных перестановках будут возникать одинаковые варианты, в которых местами меняются только одинаковые элементы. Такие повторы необходимо исключить при подсчете количества неповторяющихся комбинаций.

ВАЖНО! «Повторение» здесь относится к повторяющимся элементам в исходном множестве. Но количество возможных перестановок рассчитывается только для уникальных, неповторяющихся комбинаций.

Формула количества возможных перестановок с повторениями:

$$P(n_1, n_2, \ldots, n_k)=\frac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot \ldots !\cdot n_k!},$$

где $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$.



Сколько из них можно составить наборов из трех любых фруктов?

Здесь n – <u>*общее*</u> количество элементов в исходном множестве (для нашего примера – 9), а $n_1, n_2, n_3 \ldots$ – количества элементов в каждой группе из одинаковых элементов (в нашем примере имеется $n_1 = 2$ элемента «**1**», $n_2 = 3$ элемента «**2**», $n_3 = 4$ элемента «**3**»).

Примечание. Если в исходном множестве есть неповторяющиеся (уникальные) элементы, то каждый из них считается входящим в группу из одного такого элемента. Далее можно применить ту же формулу. Однако, учитывая, что 1! = 1 и фактически уникальные элементы на результат расчетов никак не влияют, можно принять за основу следующее правило: в указанной формуле просто брать значение n равным общему количеству элементов множества (как уникальных, так и повторяющихся), а в качестве $n_1, n_2, n_3 \ldots$ брать численности групп из нескольких повторяющихся элементов.

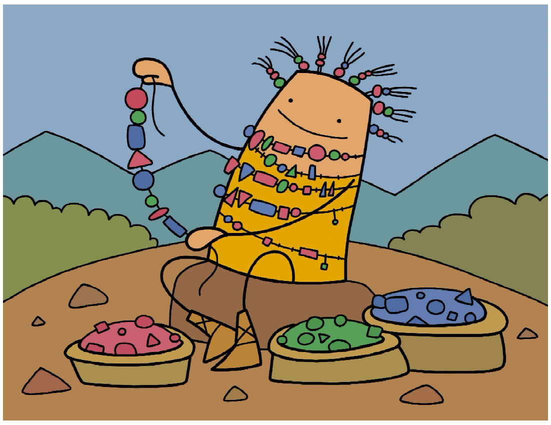
В итоге количество перестановок с повторениями в нашем примере равно $\frac{9!}{2!\cdot 3!\cdot 4!}=1260$.

Типичные задачи:

1. Сколько различных шестизначных слов можно составить из букв слова МОЛОКО?

2. Сколько различных пятизначных слов можно составить из букв слова АТАТА?

3. Есть 5 красных, 6 зеленых и 8 синих бусин. Сколько можно из них сделать различных бус?



Есть 5 красных, 6 зеленых и 8 синих бусин. Сколько можно из них сделать различных бус?

Заметим, что в формулах обозначения перестановок, размещений и сочетаний с повторениями производятся теми же самыми буквами, что и без повторений, но с надчеркиванием. Это надчеркивание – и есть признак наличия повторений.

5. РАЗМЕЩЕНИЯ С ПОВТОРЕНИЯМИ

Пусть имеется исходное множество из ***различных*** элементов, из которого требуется выбрать k элементов и расставлять их на n местах, так что каждый элемент может использоваться несколько раз, а может не использоваться совсем.

Либо:

Имеется исходное множество из k элементов, при этом можно брать их все любое количество раз, расставляя в n знакоместах.

Рабочая формула:

$$\overline{A}_n^k = k^n .$$

Фактически же в данном случае можно считать, что рассматривается количество всех возможных n-значных чисел в системе счисления с основанием k.

Пример: {**1**, **2**, **3**, **4**, **5**, **6**, **7**} – имеется 4 нечетных и 3 четных цифры. Требуется определить количество различных (неповторяющихся) комбинаций из трех нечетных цифр. Получаем: $k = 4$ (всего нечетных цифр в исходном множестве), $n = 3$ (берем любые три цифры из этого набора и расставляем на трех позициях). Тогда количество возможных комбинаций равно $\mathbf{4^3 = 64}$.

ВАЖНО! Здесь «повторение» относится к возможности повторно использовать элементы исходного множества в получаемых комбинациях, но в исходном множестве повторения элементов нет, а получаемые комбинации тоже не должны быть одинаковыми.

Типичные задачи:

1. Сколько различных трехзначных слов можно составить из букв слова РОЗАН, если каждую букву можно использовать сколько угодно раз (в том числе не использовать вовсе)?
2. Сколько возможно различных четырехзначных чисел в системе счисления с основанием 7?

6. СОЧЕТАНИЯ С ПОВТОРЕНИЯМИ

Имеется множество, в котором, возможно, есть одинаковые элементы n различных разновидностей. Из него берется некоторое количество k элементов (как одной, так и разных разновидностей; возможно, что какой-то вид элементов в тех или иных комбинациях вообще не будет выбран). Требуется узнать количество возможных различных комбинаций (наборов) таких элементов.

Рабочая формула:

$$\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k = \frac{(n+k-1)!}{k! \cdot (n-1)!} .$$

Пример: исходное множество, состоящее из единиц, двоек и троек {**1**,**1**, **2**, **2**, **2**, **3**, **3**, **3**, **3**}. Требуется найти количество различных наборов, получаемых из 5 любых выбранных из такого множества элементов. Здесь $n = 3$ (три возможных разновидности: «**1**», «**2**» и «**3**», при этом количества элементов каждой разновидности значения не имеют), а $k = 5$ (каждый набор состоит из 5 каких-то элементов). Тогда количество таких различных наборов равно:

$$\overline{C}_3^5 = C_{3+5-1}^5 = \frac{(3+5-1)!}{5! \cdot (3-1)!} = \frac{7!}{5! \cdot 2!} = 21 .$$

ВАЖНО! Здесь «повторение» относится к повторяющимся элементам исходного множества и к возможности повторно использовать элементы исходного множества в получаемых комбинациях, но получаемые комбинации не должны быть одинаковыми.

Типичные задачи:

1. В продаже есть булки с маком, с повидлом и с корицей. Сколько можно составить различных наборов при покупке 7 булок?

2. Имеются черные и белые шары. Есть ящики, в каждом из которых помещается ровно 6 таких шаров. Сколько можно сделать разных комплектов шаров в таких ящиках?

А теперь перейдем к рассмотрению соответствующих этой теме заданий ЕГЭ.

ЗАДАЧИ НА СЛОВА И КОМБИНАТОРИКУ

Задание 5. Василиса составляет шестибуквенные слова перестановкой букв слова ДОЛОТО. Сколько всего различных слов может составить Василиса?

Решение (способ 1)

1. Без учета наличия одинаковых букв общее количество перестановок шести букв равно 6! = 720. (Если количество букв в слове меньше, чем в алфавите, то количество таких перестановок вычисляется как количество размещений без повторения. Для m букв в слове и n букв в алфавите формула:

$$\overline{A}_m^n = \frac{n\,!}{(n-m)\,!}.$$

2. Перестановка k одинаковых букв не дает нового слова, и таких «фиктивных» перестановок для трех одинаковых букв будет 3! = 6. Значит, количество неповторяющихся слов уменьшается в 6 раз: 720/6 = 120.

3. Остальные буквы – не повторяющиеся. Значит, больше уменьшения количества слов не произойдет.

Ответ: 120.

Решение (способ 2)

1. Имеется алфавит с повторениями, в котором есть повтор из трех букв «О». Остальные буквы используются по одной.

2. Используем формулу перестановки с повторениями:

$$P(1,1,1,3) = \frac{6\,!}{3\,!} = 120.$$

Ответ: 120.

Задание 6. Составляются шестибуквенные слова перестановкой букв слова НАГАНО. При этом нельзя составлять слова с двумя подряд одинаковыми буквами. Сколько всего различных слов можно составить?

Решение

1. Без учета повторяющихся букв количество слов равно 6! = 720.

2. Повторяются буквы А и Н, каждая – по 2 раза. Значит, каждая из этих пар букв уменьшает количество слов в 2! = 2 раза, а обе пары – соответственно, в 2 · 2 = в 4 раза. Получаем 720 / 4 = 180 слов.

3. Дополнительное требование: не должно быть рядом стоящих одинаковых букв, значит, недопустимыми являются слова с АА и НН.

4. Сколько возможно слов, где есть и АА, и НН? Обозначим всю пару АА как «букву» X, а всю пару НН как «букву» Y. Получим «алфавит» из букв X, Y, Г, О (соответственно, и количество букв в составляемом слове тоже получается равным 4, так как две пары повторяющихся букв мы «стянули» каждую в одну «букву»). Количество вариантов перестановок здесь равно 4! = 24.

5. Сколько возможно слов, где есть только пара АА? Аналогично предыдущим рассуждениям, если обозначить пару АА как X, мы получаем слова из 5 «букв» на «алфавите» из 5 букв, значит, количество таких перестановок равно 5! = 120. Но поскольку здесь есть еще «парные» буквы НН, которые уменьшают количество уникальных слов в 2! = 2 раза, уникальных таких слов с АА мы имеем 120/2 = 60. Однако среди них есть еще и слова, где есть и пара АА, и пара НН (24 слова), а мы их подсчитываем отдельно. Поэтому количество слов с парой АА, но без пары НН равно 60 – 24 = 36.

6. Аналогично подсчитываем количество слов с парой НН, но без пары АА. Очевидно, из «симметрии» задачи получаем, что их тоже будет 36.

7. Тогда сколько всего получается допустимых уникальных слов из «НАГАНО» без рядом стоящих одинаковых букв? Надо из найденного количества уникальных слов (180) вычесть количества: слов с обеими парами АА и НН, только с парой АА и только с парой НН:

180 – 24 – 36 – 36 = 84.

Ответ: 84.

Задача 7. Андрей составляет шестибуквенные коды из букв А, Н, Д, Р, Е, Й. Каждую букву нужно использовать ровно один раз, но при этом нельзя ставить рядом две гласные. Сколько различных кодов может составить Андрей?

Решение

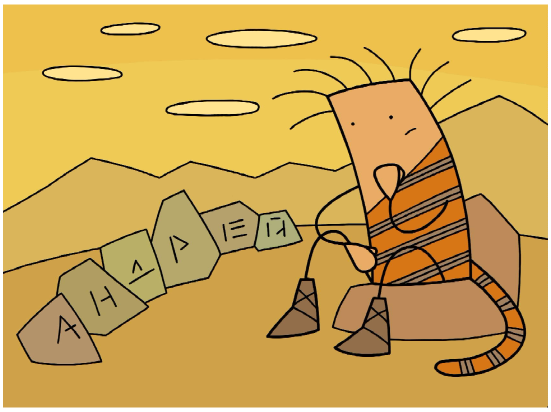
1. Имеется алфавит из 6 букв, длина слова тоже составляет 6 букв. Так как каждую букву можно использовать только один раз, количество всех возможных комбинаций (без учета требования к использованию гласных букв) определяется как 6! = 720.

2. Запрещенные варианты:

АЕ****, *АЕ***, **АЕ**, ***АЕ*, ****АЕ,
ЕА****, *ЕА***, **ЕА**, ***ЕА*, ****ЕА,

где вместо звездочки может стоять любая другая буква, то есть имеется всего 10 запрещенных вариантов.

3. В каждом таком варианте есть 4 позиции, на которых можно разместить согласные буквы: их в нашем алфавите 4 и каждая используется только один раз. Тогда в каждом варианте есть 4! = 24 вариации, а всего запрещенных вариантов будет 10 · 24 = 240.



Андрей составляет 6-буквенные коды из букв А, Н, Д, Р, Е, Й.

4. Тогда разрешенных слов остается 720 – 240 = 480.

Ответ: 480.

Задача 8. Цезарь составляет 6-буквенные слова, в которых есть только буквы Б, Р, У, Т. Словом считается любая допустимая последовательность букв, не обязательно осмысленная. При этом буква У используется в каждом слове ровно 1 раз, а каждая из других допустимых букв может встречаться в слове любое количество раз или не встречаться совсем. Сколько существует слов, которые может составить Цезарь?

Решение

1. Здесь указано, что буква У может быть использована только один раз. Тогда допустимыми будут только следующие слова:

У*****, *У****, **У***,
***У**, ****У* и *****У,

где вместо звездочки может стоять любая другая буква, то есть имеется всего 6 допустимых вариантов.

2. В каждом из этих вариантов остальные три буквы (Б, Р и Т) можно использовать любое количество раз. Это – размещения с повторениями, где $n = 3$, а $k = 5$. Тогда количество таких размещений равно $3^5 = 243$.

(*Другой способ рассуждений:* в данном случае это эквивалентно составлению пятизначных чисел в троичной системе счисления, а таких чисел возможно $3^5 = 243$.)

3. Тогда общее количество допустимых слов равно 6 · 243 = 1458.

Ответ: 1458.

Задача 9. Сколько слов длины 5, начинающихся с согласной буквы и заканчивающихся гласной буквой, Соня может составить из букв С, О, Н, Я, если каждая буква может входить в слово несколько раз?

Решение:

1. Сначала определим все возможные допустимые варианты слов, которые начинаются с согласной и заканчиваются гласной буквой:

С***О, С***Я, Н***О, Н***Я.

2. В каждом из этих четырех вариантов вместо звездочек может использоваться любое количество раз любая буква алфавита, поскольку в условии нет запрета даже на

повторное использование тех же гласных и согласных, которые мы уже использовали. Поэтому количество допустимых комбинаций определяется как количество размещений с повторениями, где $n = 4$, а $k = 3$ (либо как количество всех возможных трехзначных чисел в четверичной системе), и равно $4^3 = 64$.

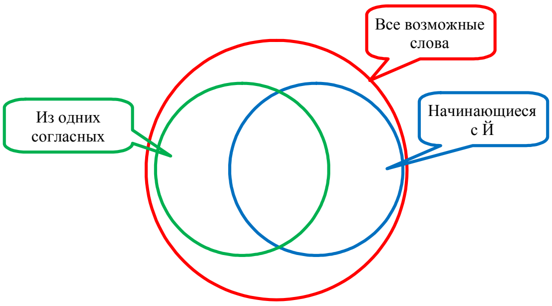
3. Тогда общее количество допустимых вариантов равно $4 \cdot 64 = 256$.

Ответ: 256.

Задача 10. Василий составляет 4-буквенные коды из букв В, А, Я, Ю, Щ, И, Й. Каждую букву можно использовать любое количество раз, при этом код не может начинаться с буквы Й и должен содержать хотя бы одну гласную. Сколько различных кодов может составить Василий?

Решение:

Диаграмма, отражающая получаемые множества слов:



Таким образом, можно найти искомое количество слов, если из общего числа возможных слов вычесть количество слов, начинающихся с Й, и количество слов, в которых нет ни одной гласной, но при этом нужно прибавить количество слов, начинающихся с Й и не содержащих гласные, так как это количество было вычтено дважды.

1. Общее число возможных слов без учета ограничений: $7^4 = 2401$.

2. Количество слов, начинающихся с Й (Й***): $7^3 = 343$.

3. Количество слов, в которых нет гласных букв (то есть допустимо только три буквы – В, Щ, Й): $3^4 = 81$.

4. Количество слов, начинающихся с Й и не содержащих гласных букв (Й***): $3^3 = 27$.

5. Количество подходящих слов:
$2401 - 343 - 81 + 27 = 2004$.

Другой вариант решения:

1. Первая буква кода – любая, кроме Й, – всего таких 6 букв. Из этих 6 случаев возможны 4, начинающиеся с гласной (А, Я, Ю, И), тогда в остальных 3 позициях слова гласной может не быть (то есть допустимо использование _любых_ букв из 7, входящих в алфавит). В 2 случаях же (начало слова с В или Щ) в оставшихся 3 позициях слова должна быть минимум одна гласная.

2. Для каждого из 4 первых случаев возможно $7^3 = 343$ вариантов, всего $4 \cdot 343 = 1372$ вариантов.

3. Для 2 последних случаев слово может включать одну, две или три гласных. То есть возможны варианты:

– 1 гласная и 2 согласных: ГСС, СГС, ССГ, по гласным в каждом случае возможно 4 варианта, по согласным возможно $3^2 = 9$ вариантов, всего возможно $3 \cdot 4 \cdot 9 = 108$ вариантов;

– 2 гласных и 1 согласная: ГГС, ГСГ, СГГ, по гласным в каждом случае возможно $4^2 = 16$ вариантов, по согласным возможно 3 варианта, всего возможно $3 \cdot 16 \cdot 3 = 144$ варианта;

– 3 гласных: ГГГ, возможно $4^3 = 64$ варианта.

Тогда для каждого такого случая имеем $108 + 144 + 64 = 316$ вариантов, а для обоих этих случаев – $316 \cdot 2 = 632$ варианта.

4. Общее число вариантов равно:
$1372 + 632 = 2004$ различных слова.

Ответ: 2004.

К сожалению, подобное использование комбинаторики позволяет составителям заданий ЕГЭ «генерировать» очень большое, почти что неограниченное количество «комбинаций» для условий таких задач. Поэтому разобрать каждую из них нам вряд ли удастся. Однако можно дать следующие рекомендации по их решению.

1. Прежде всего, смотрим, какие ограничения накладываются на составление слов. Такие ограничения могут быть как «обязывающими» (типа «разрешается составлять слова, где…») или «запрещающими» («не допускается использовать слова, в которых…»).

Если ограничение «обязывающее», то мы сначала определяем, какие варианты слов будут допустимыми (расставляя в них указанные буквы и заменяя остальные звездочками), и определяем количество таких допустимых вариантов. Далее для каждого из этих вариантов формулами комбинаторики определяем количества допустимых комбинаций. И наконец, найденное количество возможных комбинаций в каждом допустимом варианте умножаем на количество таких вариантов.

(Возможно, что количества звездочек в каких-то из этих вариантов будут разными, тогда придется весь список найденных вариантов делить на группы, определять количества возможных комбинаций в каждой такой группе, затем умножать каждое количество комбинаций на соответствующее количество вариантов, а в итоге сложить полученные произведения для всех выделенных групп вариантов.)

Если же ограничение «запрещающее», то мы сначала определяем по формулам комбинаторики, сколько комбинаций слов можно получить вообще (для такого числа букв в алфавите и количества знакомест в слове). А затем мы тоже должны определить все возможные недопустимые варианты и определить их количество (аналогично тому, как описано выше) и из ранее найденного общего числа комбинаций вычесть количество запрещенных.

2. При определении количества способов расстановки букв на соответствующем количестве мест мы смотрим:

– можно ли по условию задачи использовать те буквы, которые мы уже учли при определении допустимых вариантов (если нет, то мы «выбрасываем» эти буквы из исходного алфавита и тем самым уменьшаем количество букв в алфавите);

– есть ли в алфавите повторяющиеся буквы: если да, то может появиться возможность применить формулу количества перестановок с повторениями и упростить решение, не «генерируя» все возможные допустимые (или запрещенные) варианты вручную;

– должны ли буквы использоваться ровно по одному разу или могут быть использованы сколько угодно раз (в том числе вообще не использоваться): в первом случае используется формула количества перестановок, во втором – количества размещений с повторениями.

3. В некоторых случаях, когда в условии оговаривается обязательное наличие или запрет на наличие определенных пар букв, можно такие пары заменить «псевдобуквами» (например, латинскими, чтобы отличать их от обычных), соответственно уменьшая количество элементов алфавита. А далее задача решается, как обычно, уже для нового алфавита с «псевдобуквами».

4. Если разрешено или запрещено два каких-то события, причем они объединены по логике «ИЛИ» (то есть допустимо или запрещено ***хотя бы одно*** из этих событий), то нужно дополнительно проследить, чтобы правильно подсчитать все возможные ситуации: с наличием обоих событий сразу, только первого события и только второго, при этом не посчитав что-то из них дважды.

Богомолова Ольга Борисовна,
доктор педагогических наук,
почетный работник сферы образования Российской Федерации,
Заслуженный учитель города Москвы, учитель информатики и математики ГБОУ СОШ № 1360, г. Москва,

Усенков Дмитрий Юрьевич,
ГБОУ СОШ № 1360, г. Москва.