



Проекты

Хайнц Шуманн

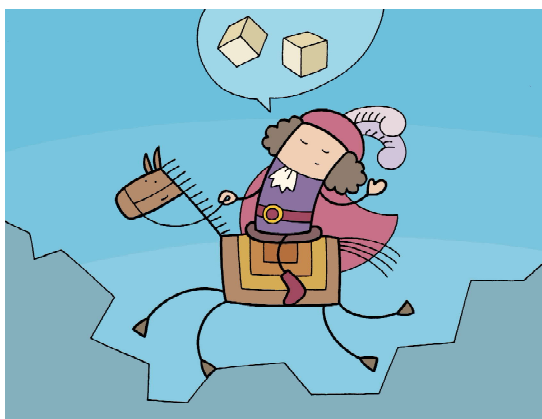
ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОХОЖДЕНИЕ ОДНОГО КУБА СКВОЗЬ ДРУГОЙ КУБ (Проблема принца Руперта)

Системы динамической пространственной геометрии (DRGS) открывают сегодня новые возможности при решении задач стереометрии. Инструменты в таких системах позволяют одинаково правильно производить геометрические построения и экспериментальные геометрические исследования в соответствующем виртуальном пространстве экрана. В дополнение к обычным пространственно-геометрическим вычислениям, пространственно-геометрический дизайн и измерения – это еще один метод решения [3]. Этот метод будет продемонстрирован в настоящей работе на примере проникновения куба через другой куб, по меньшей мере, того же размера. Эта проблема с английским обозначением “Prince Rupert’s Problem” известна во всем мире. Решение этой задачи оптимизации с помощью DRGS выходит за пределы программы средней школы.

ВВЕДЕНИЕ

Существует множество публикаций и страниц в Интернете о парадоксальной проблеме прохождения одного куба сквозь другой куб того же размера или большего. Среди всех публикаций публикация D. J. E. Schrek [2] выделяется благодаря ее обширному и тщательному исследованию.

В ней сообщается о возникновении проблемы и различных её исторических решениях. Вероятно, первая формулировка проблемы прохождения одного куба через другой принадлежит принцу Руперту из Пфальца (1619–1682), выходцу из семьи Виттельсбахеров, который был не только успешным полководцем на службе английской королевской семьи, но также другом науки и одним из первых стипендиатов 1660 года. Принц поспорил, что сможет протолкнуть куб через другой куб, такого же размера без его повреждения (проблема принца Руперта). Известный математик Джон Уоллис (1616–1703) сообщает об этом в своей работе



...первая формулировка проблемы прохождения одного куба через другой принадлежит принцу Руперту...

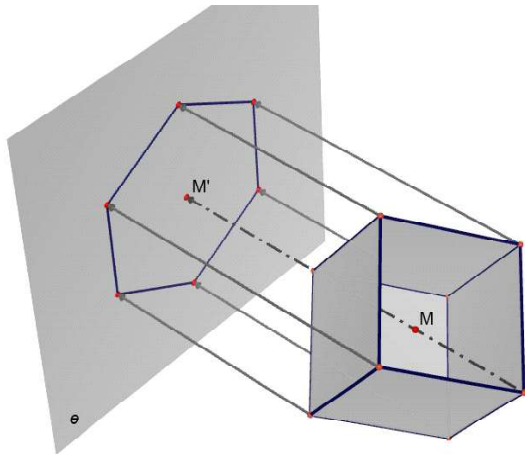


Рис. 1. Правильный шестиугольник как ортогональная проекция куба

«Трактат по алгебре», в то же время создав проходящий куб большего размера, чем тот, через который необходимо пройти. Однако самый большой куб был обнаружен намного позже голландцем Питером Ньюландом (1764–1794). Далее, используя средства Систем динамической пространственной геометрии, и практически без вычислений, рассмотрим решения проблемы принца Руперта и более общей проблемы Джона Уоллиса и Питера Ньюланда.

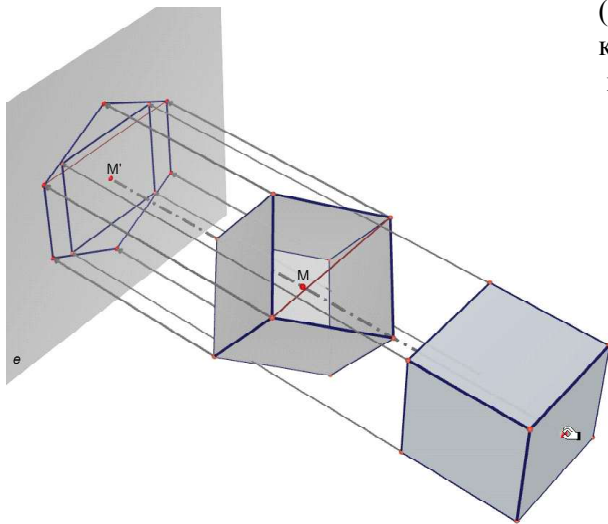
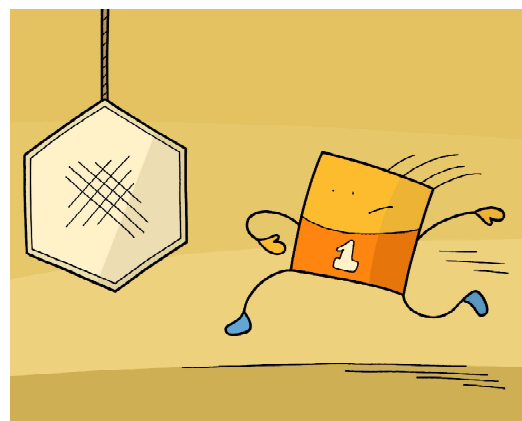


Рис. 2. Комбинированная ортогональная проекция

1. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ, ПОСТАВЛЕННОЙ ПРИНЦЕМ РУПЕРТОМ

Спроектировав куб в направлении одной из его пространственных диагоналей перпендикулярно плоскости e , получим в качестве проекции правильный шестиугольник (рис. 1¹). При таком ортогональном проектировании куба площадь его проекции является максимальной. Наименьшее по площади сечение – квадрат получим при проектировании второго куба так, что одна из его граней параллельна плоскости проекции. Далее мы комбинируем ортогональные проекции обоих кубов одинакового размера так, что ось второго куба, проходящая через центры двух противоположных граней, совпадает с осью (пространственной диагональю) первого, а одно из рёбер второго куба параллельно диагонали боковой грани первого куба (рис. 2).

На плоскости проекции видно, что вершины квадрата, симметрично расположенного относительно шестиугольника, находятся внутри плоскости этого шестиугольника. Это и говорит нам о том, что второй кубик может пройти сквозь первый. Вместо второго куба можно взять призму с квадратным основанием и произвольной высотой, перпендикулярной плоскости проекции (рис. 3), при этом грани этой призмы высекают в первом кубе отверстие; от первого куба остаётся еще некоторый остаток. Этот



... комбинируем ортогональные проекции
обоих кубов...

¹ Рисунки выполнены автором с помощью программы Cabri 3D. Можно использовать и другие подходящие программы DRGS, а также 3D-модуль программы Geogebra.

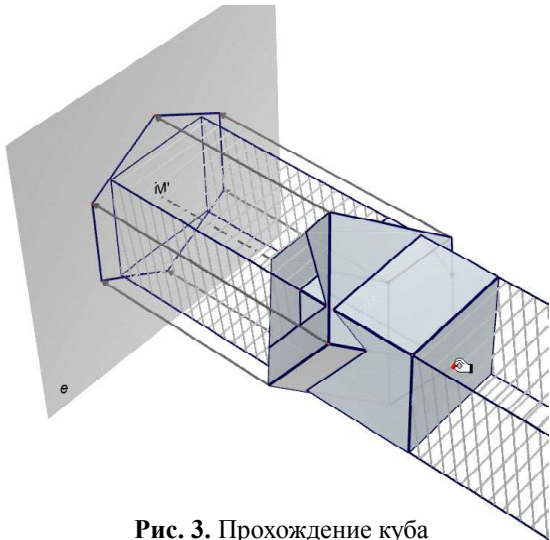


Рис. 3. Прохождение куба через равный ему куб

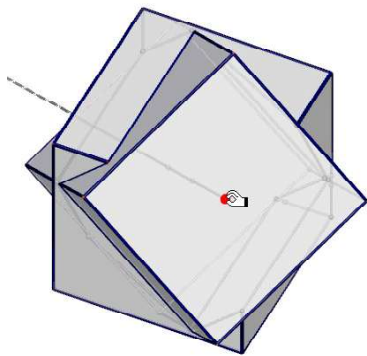


Рис. 5. Симуляция проталкивания

остаток симметричен относительно центра того куба, которому он принадлежит. Результат показан на рисунке 4; один из моментов этого прохождения показан на рисунке 5. На оставшейся части видно, что между гранями кубиков существуют воздушные зазоры, то есть можно протолкнуть куб большего размера.

Примечание 1: Физическая модель остатка может быть воспроизведена с помощью 3D-печати. К сожалению, существующие программы DRGS пока еще не обладают такой возможностью.

2. РЕШЕНИЕ УОЛЛИСА

Рассмотрим квадрат расположенный внутри правильного шестиугольника (рис. 2). Он может быть увеличен так, что его вер-

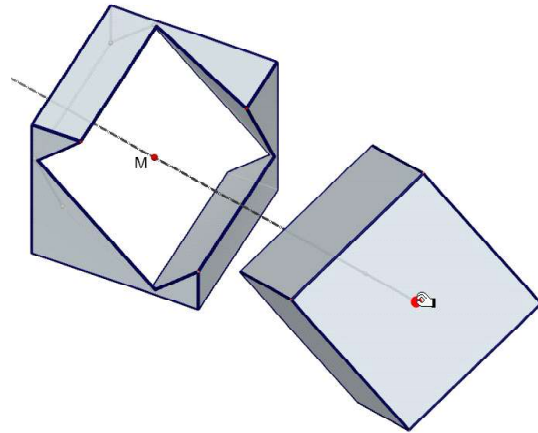
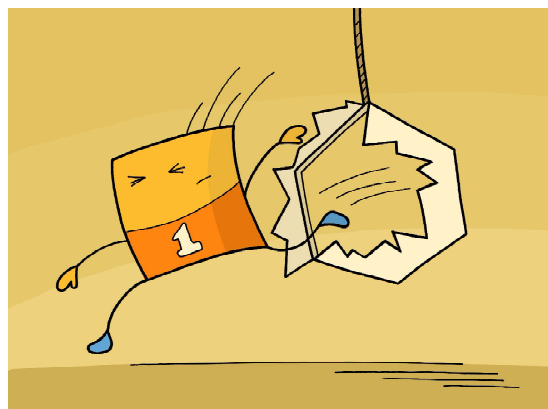


Рис. 4. Остаточная часть тела куба, через которую необходимо протолкнуть другой куб



...второй кубик может пройти сквозь первый.

шины будут принадлежать периметру шестиугольника. Результат центрального растяжения относительно центра M' шестиугольника показан на рисунке 6. Если этот квад-

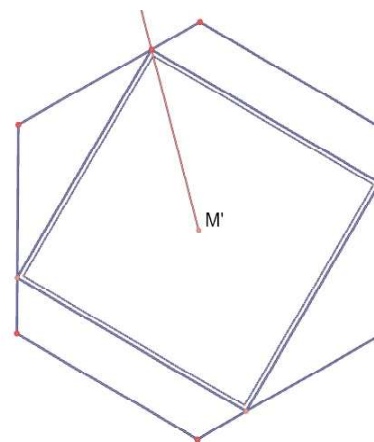
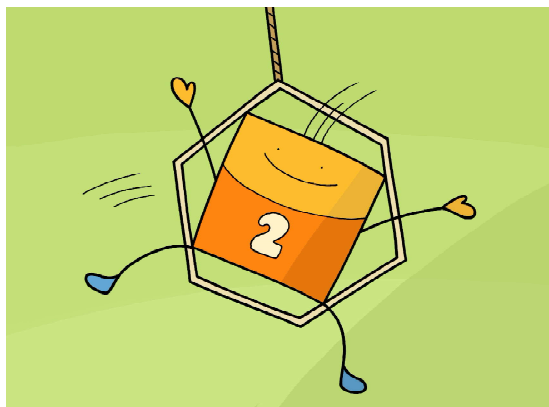


Рис. 6. Увеличение квадрата



...его вершины будут принадлежать периметру шестиугольника.

рат сделать гранью куба, то этот второй куб пройдет сквозь первый без повреждений. Как уже было описано выше, от первого куба при прохождении через него призмы с квадратным основанием, остается некоторый остаток (рис. 7). Оставшаяся часть состоит из двух призм и тетраэдров, симметрично расположенных относительно центра куба и имеющих одну общую точку. У призм основания – равнобедренные прямоугольные треугольники; тетраэдры – прямоугольные с аналогичными треугольниками в основании.

С помощью опции точного измерения длин и площадей, возникающих при конструировании, можно измерить размеры оставшейся формы (рис. 8). Для кубика с длиной

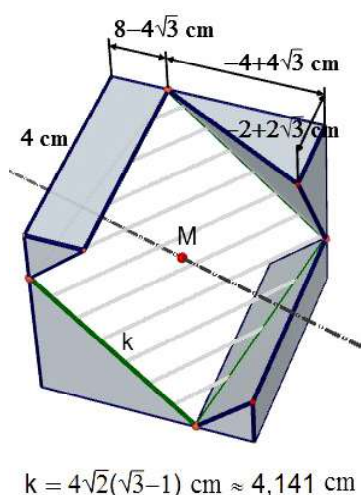


Рис. 8. Точное измерение определяющее длину ребер

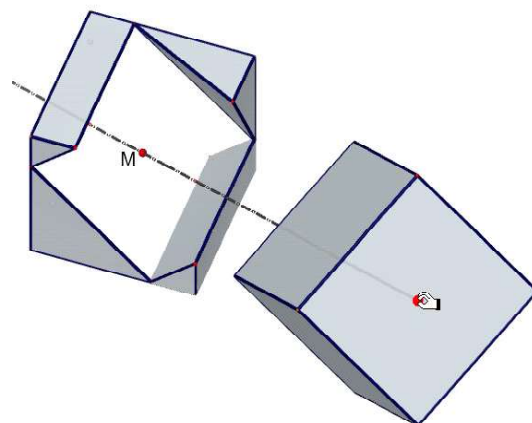


Рис. 7. Оптимальное прохождение ортогональной проекции в направлении пространственной диагонали

ребра 1 линейная единица длины ребер базисного треугольника призмы $2 - \sqrt{3}$ лин. ед.; длины ребер базисного треугольника тетраэдра $\sqrt{3} - 1$ лин. ед., а длина соответствующей высоты $(\sqrt{3} - 1)/2$ лин. ед. Для длин ребер куба, проходящего сквозь данный куб, $\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)$ лин. ед. $\approx 1,035$ лин. ед. (приближенное значение с тремя точными знаками после запятой). Таким образом, у куба, который проходит через данный куб, длина ребра на 3,5 % больше длины ребра сквозь который он проходит.

Чтобы построить физическую модель, достаточно построить развертки этих тел, а затем их распечатать (рис. 9 вверху развертка тетраэдра, внизу призмы).

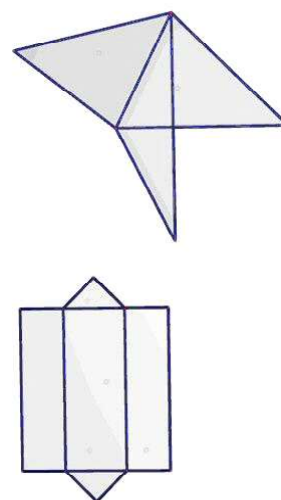


Рис. 9. Развёртка оставшейся части тела

Примечание 2: Вышеприведённое решение проблемы – пример того, как пространственная проблема может быть решена с помощью решения на плоскости. Это также пример перехода от более простого к более сложному.

3. БЕСКОНЕЧНО МНОГО ДРУГИХ РЕШЕНИЙ И РЕШЕНИЕ НЬЮЛАНДА

Обобщая направление проекции, мы получаем экспериментальные данные для бесконечного числа решений, при которых пронизывающий куб больше, чем куб из решения Уоллиса. Среди всех этих решений находится оптимальное решение Ньюланда. При этом направление ортогональной проекции определяется с помощью прямой, проходящей через две точки, лежащие на противоположных рёбрах по отношению к центру куба (рис. 10). Проекция куба на плоскость, перпендикулярную к этой прямой, представляет собой центрально симметричный шестиугольник с двумя равными сторонами и третьей вертикальной стороной другой длины. В этот шестиугольник впишем максимально возможный квадрат. На этом квадрате построим куб и будем действовать дальше, как показано в 2...

Рисунок 11 показывает остаток тела куба с длиной ребра 4 см и расстоянием $a = 0,74$ см точки, определяющей направление, от вершины E . В этом случае длина ребра, пронизывающего куб, имеет (округлённо) длину $k = 4,23$ см. Середина ребра есть граничное положение точки, определяющей направление; в этом случае тетраэдры вырождаются в два равнобедренных прямоугольных треугольника. В другом случае мы переместим точку вдоль ребра на расстояние $a = 1,61$ см. В результате мы получаем, что проникающий куб имеет меньшую длину ребра, равную $k = 4,17$ см. Непрерывное изменение положения точки дает нам эмпирическую функцию, выражающую зависимость длины ребра k от расстояния a (рис. 13).

Несложно определить, что максимум этой функции достигается при $a = 1$ см. Если эту точку закрепить в конечной точке ребра

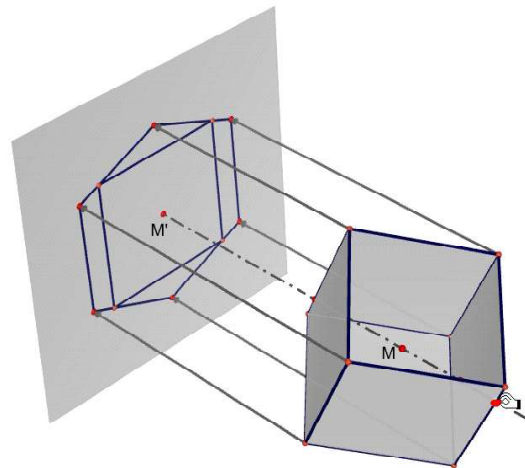


Рис. 10. Обобщенное направление проекции с проекцией проталкиваемого куба

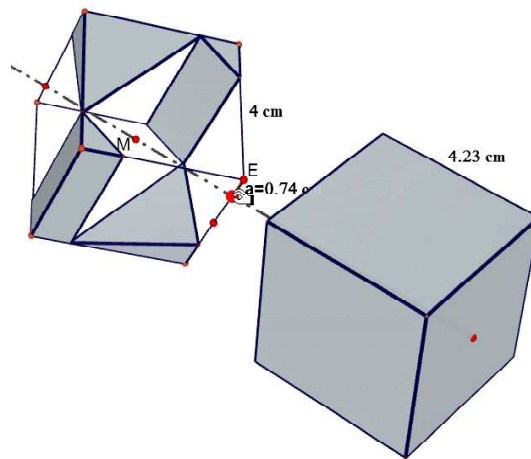


Рис. 11. Первое изменение

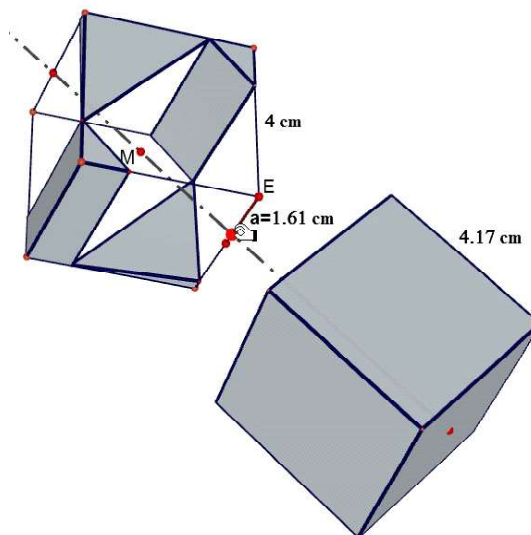


Рис. 12. Последующее изменение

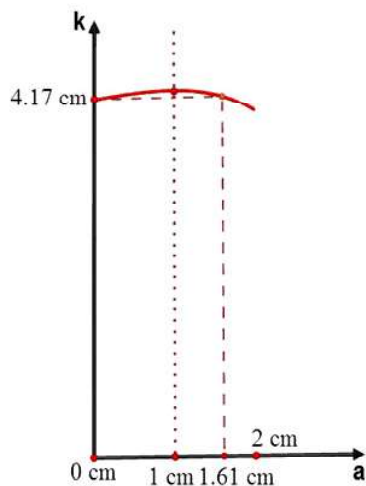


Рис. 13. Эмпирическая функция длины ребра k в зависимости от расстояния a

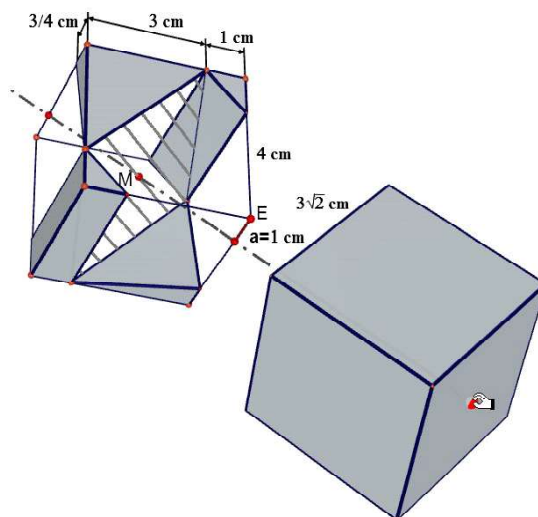


Рис. 14. Оптимальное решение для куба с длиной ребра $k = 4$ см

длиной 1 см, то мы получим оптимальное решение Ньюланда с точно измеренными длинами (рис. 14). Для кубика с длиной ребра 1 соответствующие значения необходимо уменьшить в 4 раза. Длина ребра $k = 3\sqrt{2}/4$ ед. $\approx 1,061$ ед., есть длина ребра максимально возможного куба, который можно протаскивать сквозь куб с длиной ребра равной 1, то есть в 6,1 % больше, чем длина ребра единичного куба.

На рисунке 15 показан многогранник, симметричный относительно общего центра двух кубов, протаскиваемого и того, через который протаскивают. На рисунке 16 показана развертка без упорядочения соответствующих сторон развертки, образующих одно ребро.

Примечание 3: При этом также решается задача вписать в куб квадрат наибольших размеров. Для куба с ребром, равным 1, длина стороны такого квадрата равна $3\sqrt{2}/4$ ед. Центр такого квадрата совпадает с центром куба. Его положение определяется положением двух его вершин, которые лежат на смежных ребрах куба на расстоянии $1/4$ ед. от не общих вершин этих ребер.

Послесловие: Если выбрать другое положение линии проекции, чем то, которое указано выше, то мы получим центрально-сим-

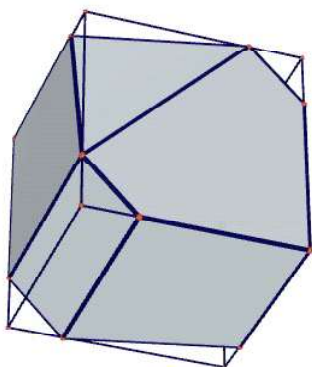


Рис. 15. Проникающее тело

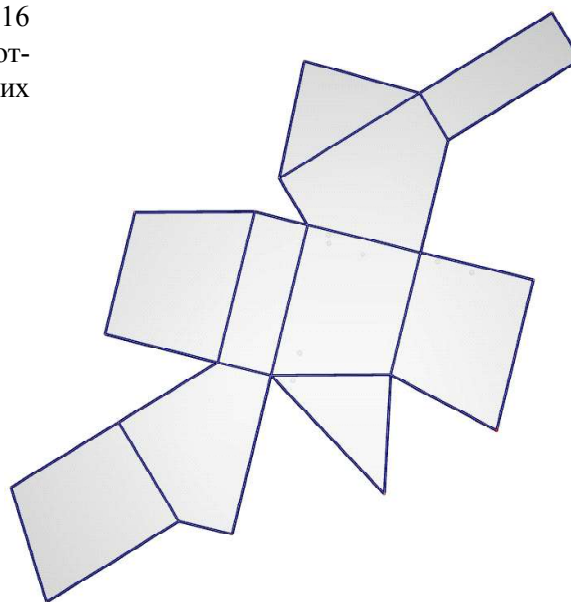


Рис. 16. Развёртка проникающего тела

метричный шестиугольник с тремя сторонами разной длины (рис. 15). У квадрата, вписанного в этот шестиугольник, длина стороны всегда меньше, чем в приведенном выше решении.

4. ПЕРСПЕКТИВА

В пределах изучения задач геометрии пространства с помощью систем DRGS, задача прохождения одного куба сквозь другой может быть аналогичным образом распространена также и на другие тела Платона или даже на более общие классы многогранников, например, тела Архимеда. Для правильных тетраэдров и октаэдров решения уже существуют [4].

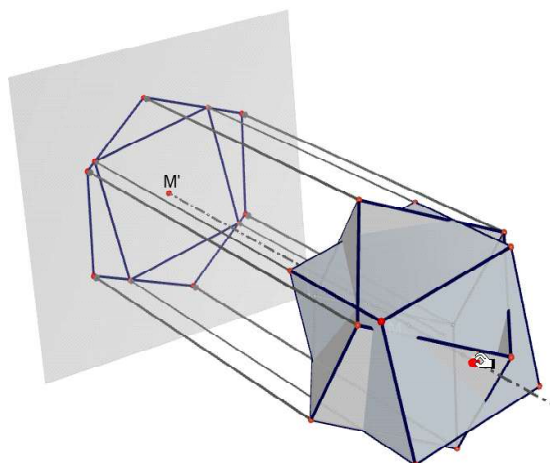


Рис. 17. Асимметричное положение прямой, определяющей направление проекции

Литература

1. *Ehrenfeucht A.* The Cube Made Interesting. Oxford: Pergamon Press, 1964.
2. *Schrek D. J. E.* Prince Rupert's problem and its extension by Pieter Nieuwland // Scripta Mathematica. 1950. Vol. 16. P. 73–80; 261–267.
3. *Schumann H.* Schulgeometrie im virtuellen Handlungsraum. Hildesheim: Verlag Franzbecker, 2007.
4. *Scriba Ch. J.* Das Problem des Prinzen Ruprecht von der Pfalz // Praxis der Mathematik. 1968. Vol. 10 (9). P. 241–246.
5. https://ru.wikipedia.org/wiki/Куб_принца_Руперта (дата обращения: 21.06.19).
6. <http://mathworld.wolfram.com/PrinceRupertsCube.html> (дата обращения: 21.06.19).

Хайнц Шуманн,
Prof. Dr. Heinz Schumann,
Faculty II, Mathematics,
University of Education Weingarten,
D-88250 Weingarten
schumann@ph-weingarten.de

