Компьютерные инструменты в образовании, 2020
№ 1: 28–37
УДК: 519.1
http://cte.eltech.ru
doi:10.32603/2071-2340-2020-1-28-37

СЕМЕЙСТВА ДЕРЕВЬЕВ СМЕЖНОСТИ И КРИТЕРИЙ ДОПОЛНИТЕЛЬНОСТИ*

Максимов А. Г.[1,2], младший научный сотрудник, agm@dscs.pro
Завалишин А. Д.[1,2], младший научный сотрудник, adz@dscs.pro
Абрамов М. В.[1,2], кандидат технических наук, ✉ mva@dscs.pro
Тулупьев А. Л.[2,1], доктор физико-математических наук, alt@dscs.pro

[1]Санкт-Петербургский институт информатики и автоматизации Российской академии наук,
14 линия, 39, 199178, Санкт-Петербург, Россия
[2]Санкт-Петербургский государственный университет,
Университетская наб., 7–9, 199034, Санкт-Петербург, Россия

Аннотация

Статья направлена на обобщение понятий графа производной и первообразной графа для графов, обладающих магистральной связностью. Формулируются и доказываются теоремы о магистральной связности графа производной и о графе первообразной магистрально связных графов. Теоретическая и практическая значимость заключается в изучении структур, которые будут лучше всего подходить для работы с алгебраическими байесовскими сетями и, таким образом, становятся одной из целей их машинного обучения. Отметим новизну взгляда на задачу, а точнее, на изучение вопроса, для каких семейств графов существует набор нагрузок, семейство МГС над которым в точности совпадает с заданным.

Ключевые слова: *графы смежности, теория графов, инварианты на графах, алгебраические байесовские сети.*

Цитирование: Максимов А. Г., Завалишин А. Д., Абрамов М. В., Тулупьев А. Л. Семейства деревьев смежности и критерий дополнительности // Компьютерные инструменты в образовании. 2020. № 1. С. 28–37. doi:10.32603/2071-2340-2020-1-28-37

1. ВВЕДЕНИЕ

Современные вычислительные мощности позволяют ставить и решать задачи машинного обучения в отношении ряда объектов, использующихся для представления и обработки данных и знаний с неопределённостью в искусственном интеллекте. Подходы машинного обучения развиваются и применяются в том числе к вероятностно-графическим моделям; одной из таких моделей являются алгебраические байесовские

* Работы произведены при поддержке гранта РФФИ 18-01-00626 «Методы представления, синтеза оценок истинности и машинного обучения в алгебраических байесовских сетях и родственных моделях знаний с неопределенностью: логико-вероятностный подход и системы графов» и по государственному заданию № 0073-2019-0003.

сети (АБС) [2]. Поскольку структура графа-носителя сети очень важна при работе с такого рода моделями, одной из задач является как раз изучение структур, которые будут лучше всего подходить для работы с алгебраическими байесовскими сетями и, таким образом, становятся одной из целей их машинного обучения.

Одной из глобальных структур, используемых в теории АБС, является вторичная структура — граф смежности [3–8]; в частности, интересен аспект выделения из сети подграфа, представляющего собой минимальный граф смежности [2]. Изучение подобных структур помогает упростить работу с сетью, ускорить её, улучшить структурирование данных, визуализацию работы алгебраической байесовской сети. В силу того, что минимальных графов смежности (МГС) над одной и той же первичной структурой сети может быть построено несколько [2], разумно говорить о *семействе* МГС. В рамках изучения такого семейства представляется верным решением найти у его членов ряд характеристик, присущих каждому из них, либо сопоставить семейству какой-то объект, задаваемый однозначно, то есть найти инварианты в наборе минимальных графов смежности.

Этот вопрос уже изучался ранее; так, в работе [1] было показано, что число ребер во всех представителях семейства МГС одинаково. Однако для более полной картины представления о семействе минимальных графов смежности необходим более тщательный поиск инвариантов в этой структуре, в том числе и тех «задаваемых однозначно», которые одновременно несли бы ту же информацию о связях, что и сами МГС.

Мы предлагаем взглянуть на эту проблему под иным углом и поставить обратную задачу, которая заключается в анализе следующего вопроса: для каких семейств графов существует набор нагрузок, семейство МГС над которым в точности совпадает с заданным. Изучение этой задачи может дать ответ на те вопросы, на которые не могло дать ответа прямое решение задачи по нахождению инвариантов, а также поможет по-другому взглянуть на эту проблему. Решение указанной обратной задачи на деревьях является целью настоящей работы.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть заданы неориентированный граф $G = \langle V, E\rangle$, конечный алфавит $\mathscr{A}$, функция нагрузок $\omega : V \to 2^{\mathscr{A}}$, сопоставляющая каждой вершине графа ее нагрузку — подмножество $\mathscr{A}$. Сразу условимся не делать различий между вершиной и ее нагрузкой, если из контекста очевидно, о чем идет речь.

Граф G магистрально связен и является графом смежности, если выполнены следующие условия [3]:

— любые две вершины, имеющие непустое пересечение нагрузок, соединены путем;
— в нагрузки всех вершин этого пути входят все элементы, общие для его начальной и конечной вершин.

Замечание: Нетрудно понять, что для одной и той же функции нагрузок может существовать целое семейство графов смежности.

Минимальный по включению граф смежности над заданной первичной структурой называется минимальным графом смежности (МГС) [9]. В [1] было показано, что минимальные графы смежности минимальны не только по включению, но и по числу ребер. Это означает, что все МГС имеют одинаковое число ребер. Таким образом, если один из минимальных графов смежности является деревом, то деревьями являются и все остальные.

Пусть задано семейство деревьев T на множестве вершин V. Необходимо проверить, может ли это семейство совпадать с каким-то семейством МГС. Иными словами, можно ли построить такую функцию нагрузок, семейство минимальных графов смежности над которой совпадает с T.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ

В качестве первого приближения докажем следующее утверждение:

Теорема 1. Для любого натурального числа n существует первичная структура АБС, семейство МГС над которой имеет в точности размер n.

Доказательство: Идея состоит в построении «переключателя», допускающего ровно n состояний. Возьмем вершины с нагрузками $\{1\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{3,4\} \dots \{n-2, n-1\}, \{n-1\}$. Самая первая вершина имеет нагрузку, равную единице, самая последняя — равную $n-1$, все промежуточные — равную $k-1, k$, где k номер вершины в единичной индексации (рис. 1). Обозначим за w элемент, которого нет ни в одной из нагрузок. Добавим еще одну вершину, сделав ее нагрузку в точности равной w, а также добавим w в нагрузки всех остальных вершин. Как тогда будут выглядеть МГС? Во-первых, все они будут содержать ребро между первой и второй вершинами, между второй и третьей и так далее, потому что пересечение нагрузок в таких парах уникально. Во-вторых, других ребер между вершинами от первой до n нет, потому что такие ребра будут иметь пустую нагрузку, а значит их можно удалить без потери магистральной связности, что противоречит минимальности. Наконец, они будут содержать ребро между новой вершиной и любой из старых, так как пересечение нагрузки новой вершины с нагрузкой любой старой не зависит от выбора старой вершины, и только одно такое ребро, иначе второе и последующие можно было бы удалить. Тогда МГС на построенном наборе нагрузок ровно n штук. ∎

Рис. 1. Первый шаг

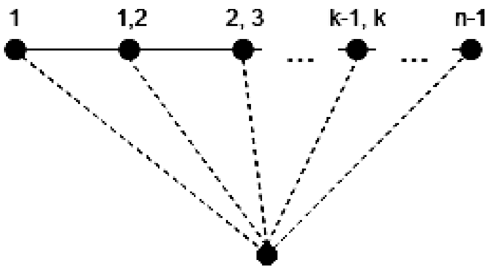

Рис. 2. Итоговая структура. Пунктиром проведены возможные ребра

Тот факт, что мы можем получить как МГС любой граф, а также семейство произвольного размера, может внушить некоторый оптимизм и надежду, что в действительности произвольное семейство может быть семейством МГС, однако оптимизм этот оказывается ложным, что показывает следующая теорема.

Теорема 2. Семейство МГС никогда не совпадает с $K_{1,3}$, $K_{1,3}$.

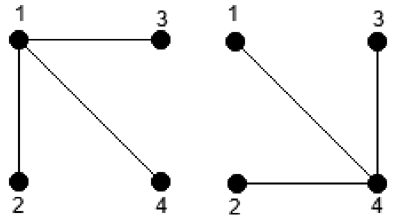

Рис. 3. Недостижимое семейство. Вершины v_1, v_2, v_3, v_4 помечены своими номерами

Доказательство: этот факт довольно просто проверить методом грубой силы, однако можно предложить и более изящный вариант. Покажем, что граф G^* на ребрах $(v_1, v_2), (v_3, v_4), (v_1, v_4)$ тоже войдет в семейство. Для этого необходимо проверить существование магистрального пути между $(v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_1, v_4), (v_2, v_3), (v_2, v_4), (v_3, v_4)$. Для половины этих пар магистральная связность совсем очевидна, так как они соединены ребром: $(v_1, v_2), (v_1, v_4)$, (v_3, v_4). Путь из v_2 в v_4 через v_1 магистрален из первого графа, а из v_1 в v_3 через v_4 — из второго. Осталось проверить только магистральность пути из v_2 в v_3 через v_1 и v_4. Из первого графа известно, что $v_2 \cap v_3 \subseteq v_1$, а из второго известно, что $v_2 \cap v_3 \subseteq v_4$, так что путь между v_1 и v_3 в новом графе G^* действительно магистральный. ■

В дальнейшем такие деревья, не входящие в исходное семейство, но магистральность которых следует из магистральности графов семейства, будем называть *дополнительными*. Отметим, что существование такого графа влечет за собой невозможность семейства быть семейством МГС.

Итак, не любое семейство деревьев может быть семейством МГС. Прежде чем приступать к обобщениям этого факта, давайте сперва покажем, что, по крайней мере, любое семейство деревьев может быть *подмножеством* семейства МГС.

Теорема 3. Для любого семейства деревьев T существует первичная структура, семейство МГС на которой нестрого содержит T.

Доказательство: Назначим каждой вершине нагрузку, равную единице, то есть сделаем функцию нагрузок тождественно равной $\{1\}$ Тогда магистральность станет равносильна связности, а как устроены минимальные связные графы, хорошо известно — это деревья. То есть подойдет любое дерево, тогда семейство T содержится в семействе МГС. ■

Определение 1: Семейство МГС, содержащее исходное семейство деревьев, будем называть *расширением* исходного семейства. Отметим, что этому семейству соответствует некоторый набор весов вершин из V или, иначе, некоторая весовая функция.

Определение 2: Пусть дано семейство деревьев T на множестве вершин V. Граф G на вершинах V, не входящий в T, называется *не удлиняющим пути*, если для любой пары вершин $u, v \in V$ и любой вершины x, лежащей на пути между ними в G, выполнено $x \in R_T(\{u, v\})$.

Определение 3: Пусть дано семейство деревьев T на множестве вершин V. Рассмотрим множество $V^* \subseteq V$. *Серией релаксаций* множества V^* над семейством T будем называть следующую операцию: while $R_T^*(V^*) \neq V^*$ do $V^* = R_T^*(V^*)$. Образ множества V^* при выполнении серии релаксаций будем обозначать $R_T(V^*)$.

Замечание: из-за конечности числа вершин серия релаксаций всегда окажется конечной.

Определение 4: Пусть дано семейство деревьев T на множестве вершин V. Граф G на вершинах V, не входящий в T, называется *неудлиняющим пути*, если для любой пары вершин $u, v \in V$ и любой вершины x, лежащей на пути между ними в G, выполнено $x \in R_T(\{u, v\})$.

Иными словами, вершины на пути между $u, v \in V$ в G не выходят за пределы множества вершин, лежащих на путях между u и v в графах семейства T, а также лежащих на путях между вершинами, лежащих на путях между u и v и так далее.

Рисунки 4, 5 и таблица 1 иллюстрируют описанные выше определения.

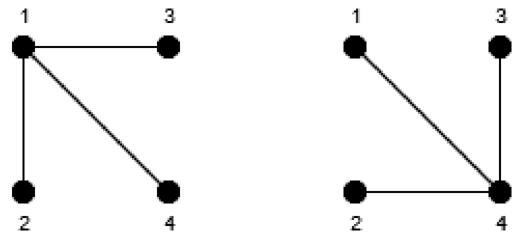

Рис. 4. Исходное семейство F

Таблица 1. Множества R_F

u, v	$R_F(\{u, v\})$
1,2	1,2,4
1,3	1,3,4
1,4	1,4
2,3	1,2,3,4
2,4	1,2,4
3,4	1,3,4

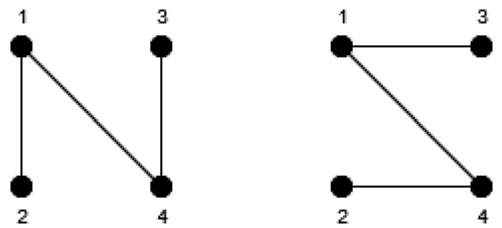

Рис. 5. Не удлиняющие пути графы для семейства F

Лемма: $\forall u, v \in V\ \forall x \in R_T(\{u, v\})\ u \cap v \subset x$.

Доказательство: На нулевом шаге серии релаксаций лемма выполнена — $u \cap v \subset u$, $u \cap v \subset v$. Пусть лемма верна на каком-то шаге. Обозначим текущее множество вершин V'. На следующем шаге в множество добавятся вершины, лежащие на путях между вершинами из V'. Но любая вершина V' содержит $u \cap v$. Тогда все добавленные вершины тоже содержат $u \cap v$. ■

Итак, мы знаем, что любое семейство можно сделать подмножеством семейства МГС, но не любое можно заставить с ним совпадать. Следующие теоремы являются обобщением результата теоремы 2.

Теорема 4. Любое неудлиняющее пути дерево является дополнительным.

Доказательство: возьмем две произвольные вершины u, v не удлиняющего пути графа G и покажем, что между ними существует магистральный путь. Так как G дерево, между u и v существует ровно один путь. Рассмотрим его. Любая вершина на этом пути лежит в $R_T(\{u, v\}$, в силу того что G не удлиняет пути, а так как все вершины в $R_T(\{u, v\})$ содержат пересечение нагрузок u и v по лемме, любая вершина на пути между u и v содержит пересечение их нагрузок, то есть путь между ними магистральный. Тогда граф G магистрально связный. ■

Теорема 5. Любое дополнительное дерево не удлиняет пути.

Прежде чем приступать к доказательству, введем дополнительное определение.

Определение 5: Пусть $s_1, s_2, \ldots, s_n$ — множества. Систему вида

$$\begin{cases} s_1 \cap s_2 \subset s_3 \\ \vdots \\ s_i \cap s_j \subset s_k \end{cases}$$ назовем *системой пересечений–вложений.*

Более формально, $\{(s_{1i}, s_{2i}, s_{3i})\}_{i=1}^{N}, \forall i \; s_{1i} \cap s_{2i} \subset s_{3i}$.

Доказательство: Для каждой пары вершин $u, v \in V$ и каждого графа G из семейства, для всех вершин x, лежащих на пути между u и v в G, $u \cap v \subset x$. Рассмотрим соответствующую систему пересечений–вложений S. Понятно тогда, что если граф G^* является дополнительным, то из получившейся системы выводится его магистральность. Тогда из S выводится $s \cap t \subset x$.

Если граф G^* не является не удлиняющим пути, то существует $s, t \in V$ и x на пути между ними в G^*, такой что $x \notin R_T(\{u, v\})$. Обозначим за u нагрузку, которая не содержится ни в одной из вершин V. Добавим u в нагрузки s и t. Если $s \cap t \subset x$ выводится из S, то отсутствие u в x должно привести к противоречию, или, иными словами, наличие u в s, t должно гарантировать наличие u в x.

Посмотрим, как изменятся от этого вмешательства нагрузки вершин V. На первом шаге необходимо будет добавить u в нагрузки всех вершин, лежащих на пути путях между s, t. На каждом следующем необходимо будет добавить u в нагрузки всех вершин, лежащих на путях между любой парой вершин, в которые u был добавлен на предыдущем шаге (если это не было сделано ранее). Нетрудно заметить, что все эти вершины получаются при соответствующем числе применений операции релаксации над исходным семейством к множеству $\{s, t\}$. Тогда, чтобы добиться непротиворечивости S, достаточно добавить нагрузку u во все вершины множества $R_T(\{u, v\})$. Но вершина x не лежит в $R_T(\{u, v\})$. ■

Теоремы 4 и 5 доставляют нам критерий дополнительности — дерево является дополнительным, если и только если оно является неудлиняющим пути.

Наконец, необходимо сделать следующее важное замечание.

Замечание: если мы не можем ни для какого дерева гарантировать, что оно содержится в семействе, почему мы можем гарантировать, что никакое дерево там не содержится? Иными словами, почему не могут существовать два расширения исходного семейства с непустой симметрической разностью?

Это замечание порождает следующее утверждение:

Теорема 6. Чтобы семейство деревьев T совпадало с семейством МГС, необходимо и достаточно, чтобы не существовало не удлиняющего пути графа.

Доказательство:

Необходимость: следует из критерия дополнительности.

Достаточность: из критерия дополнительности и условия понимаем, что дополнительного графа не существует. Тогда нужно проверить лишь невыполнимость замечания. Пусть существует расширение исходного семейства T'. Все графы в нем, которые не принадлежат семейству T, не являются дополнительными. Рассмотрим произвольный такой граф G^*. Нашей ближайшей целью является показать, что тогда существует расширение, его не содержащее.

Аналогично Теореме 5, так как граф G^* не является не удлиняющим пути, существует $s, t \in V$ и x на пути между ними в G^*, такой что $x \notin R_T(\{u, v\})$. Обозначим за u нагрузку, которая не содержится ни в одной из вершин V. Добавим u в нагрузки s и t. Затем добавим u в нагрузки всех вершин из $R_T(\{u, v\})$. Тогда магистральность графов из T не нарушится, но нарушится магистральность графа G^*.

Теперь мы знаем, что можем построить расширение, не содержащее G^*. Тогда провернем аналогичную операцию для всех деревьев, не лежащих в семействе и не являющихся не удлиняющими пути (разумеется, каждый раз обновляя u). Мы получим расширение, не содержащее никаких графов, кроме графов семейства T и, возможно, не удлиняющих пути графов. Но, так как по условию не удлиняющих пути графов нет, мы получим расширение, в точности совпадающее с T. ■

Изложенный выше ряд теорем полностью решает поставленную задачу.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе решена задача по определению, является ли семейство деревьев семейством МГС. Ответом на поставленную задачу является необходимое и достаточное условие отсутствия не удлиняющего пути графа: также было введено определение дополнительности графа и был получен критерий дополнительности графа. Как было показано, любое дерево, которое является не удлиняющим пути, является также дополнительным, однако было показано, что этот критерий работает и в обратную сторону, то есть любое дополнительное дерево не удлиняет пути.

В будущем планируется разработать и оценить алгоритм решения системы пересечений–вложений (иначе говоря, алгоритм построения такой первичной структуры, в которой исходное семейство являлось бы семейством МГС), алгоритмы поиска не удлиняющих пути графов, а также более внимательно изучить операции релаксации и серии релаксаций.

Список литературы

1. *Опарин В. В., Фильченков А. А., Сироткин А. В., Тулупьев А. Л.* Матроидное представление семейства графов смежности над набором фрагментов знаний // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2010. № 4 (68). С. 73–76.
2. *Тулупьев А. Л., Николенко С. И., Сироткин А. В.* Основы теории байесовских сетей: учебник. СПб.: СПбГУ. 2019.

3. *Тулупьев А. Л., Столяров Д. М., Ментюков М. В.* Представление локальной и глобальной структуры алгебраической байесовской сети в Java-приложениях // Труды СПИИРАН. 2007. № 5. С. 71–99.
4. *Levenets D. G., Zotov M. A., Romanov A. V., Tulupyev A. L., Zolotin A. A., Filchenkov A. A.* Decremental and incremental reshaping of algebraic Bayesian networks global structures // Proceedings of the First International Scientific Conference "Intelligent Information Technologies for Industry" (IITI'16). Springer, Cham, 2016. P. 57–67. doi: 10.1007/978-3-319-33816-3_6
5. *Gorodetskii V. I., Tulup'ev A. L.* Generating consistent knowledge bases with uncertainty // Journal of Computer and Systems Sciences International. 1997. Т. 36. № 5. P. 683–691.
6. *Romanov A. V., Levenets D. G., Zolotin A. A., Tulupyev A. L.* Incremental synthesis of the tertiary structure of algebraic Bayesian networks // 2016 XIX IEEE International Conference on Soft Computing and Measurements (SCM). IEEE, 2016. P. 28–30. doi: 10.1109/SCM.2016.7519673
7. *Mal'chevskaya E. A., Berezin A. I., Zolotin A. A., Tulupyev A. L.* Algebraic Bayesian Networks: Local Probabilistic-Logic Inference Machine Architecture and Set of Minimal Joint Graphs // Proceedings of the First International Scientific Conference "Intelligent Information Technologies for Industry" (IITI'16). Springer, Cham, 2016. P. 69–79. doi: 10.1007/978-3-319-33816-3_7
8. *Filchenkov A. A., Tulupyev A. L.* Coincidence of the sets of minimal and irreducible join graphs over primary structure of algebraic Bayesian networks // Vestnik St. Petersburg University: Mathematics. 2012. Т. 45. № 2. P. 106–113. doi: 10.3103/S1063454112020057
9. *Тулупьев А. Л.* Алгебраические байесовские сети: глобальный логико-вероятностный вывод в деревьях смежности. СПб.: Издательство «Анатолия», 2007. 40 с.

Поступила в редакцию 30.12.2019, окончательный вариант — 30.01.2020.

Максимов Анатолий Григорьевич, младший научный сотрудник лаборатории теоретических и междисциплинарных проблем информатики СПИИРАН; студент кафедры информатики СПбГУ, agm@dscs.pro

Завалишин Арсений Дмитриевич, младший научный сотрудник лаборатории теоретических и междисциплинарных проблем информатики СПИИРАН; студент кафедры информатики СПбГУ, adz@dscs.pro

Абрамов Максим Викторович, кандидат технических наук, заведующий лабораторией теоретических и междисциплинарных проблем информатики СПИИРАН; доцент кафедры информатики СПбГУ, ✉ mva@dscs.pro

Тулупьев Александр Львович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры информатики, СПбГУ; главный научный сотрудник лаборатории теоретических и междисциплинарных проблем информатики СПИИРАН, alt@dscs.pro

Computer tools in education, 2020
№ 1: 28–37
http://cte.eltech.ru
doi:10.32603/2071-2340-2020-1-28-37

Adjacency Tree Families and Complementarity Criteria

Maksimov A. G.[1,2], junior researcher, agm@dscs.pro
Zavalishin A. D.[1,2], junior researcher, adz@dscs.pro
Abramov M. V.[1,2], PhD, senior researcher, ✉ mva@dscs.pro
Tulupyev A. L.[2,1], PhD, Dc. Sci., professor, alt@dscs.pro

[1]Saint Petersburg Institute for Informatics and Automation of the Russian Academy of Sciences, 39, 14 Line, 199178, Saint Petersburg, Russia
[2]Saint Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7-9, 199034, Saint Petersburg, Russia

Abstract

The article is aimed at generalizing the concepts of a derivative graph and a primitive graph for graphs with trunk connectivity. Theorems are formulated and proved on the main connectedness of the graph of the derivative and on the graph of the antiderivative main connected graphs. The theoretical and practical significance lies in the study of structures that will be best suited for working with algebraic Bayesian networks and, thus, become one of the goal of their machine learning. We note the novelty of looking at the problem, or rather, studying the question for which families of graphs there is a set of loads, the family of MGS over which exactly coincides with the given one.

Keywords: *derivative graph, antiderivative graph, adjacency graph, backbone graph property, Bayesian algebraic networks.*

Citation: A. G. Maksimov, A. D. Zavalishin, M. V. Abramov, and A. L. Tulupyev, "Graphs of Derivatives in the Global Structures of Algebraic Bayesian Networks," *Computer tools in education*, no. 1, pp. 44–55, 2020 (in Russian); doi:10.32603/2071-2340-2020-1-44-54

Acknowledgements: *The work was performed as part of the project on state assignment SPIIRAS No. 0073-2019-0003, with financial support from the Russian Federal Property Fund, project No. 18-01-00626; project No. 18-37-00323..*

References

1. V. V. Oparin, A. A. Fil'chenkov, A. V. Sirotkin, and A. L. Tulupyev, "Matroidnoe predstavlenie semeistva grafov smezhnosti nad naborom fragmentov znanii" [Matroid representation of a family of adjacency graphs over a set of pieces of knowledge], *Nauchno-tekhnicheskii vestnik informatsionnykh tekhnologii, mekhaniki i optiki*, no. 4 (68), pp. 73–76, 2010 (in Russian).
2. A. L. Tulupyev, S. I. Nikolenko, A. V. Sirotkin, *Osnovy teorii baiesovskikh setei* [Fundamentals of Bayesian Network Theory], St Petersburg, Russia: Publishing house of St. Petersburg State University, 2019 (in Russian).
3. A. L. Tulupyev, D. M. Stolyarov, and M. V. Mentyukov, "Predstavlenie lokal'noi i global'noi struktury algebraicheskoi baiesovskoi seti v Java-prilozheniyakh" [Representation of local and global algebraic structure Bayesian network in Java-applications], in *Trudy SPIIRAN*, vol. 5, pp. 71–99, 2007 (in Russian).

4. D. G. Levenets, M. A. Zotov, A. V. Romanov, A. L. Tulupyev, A. A. Zolotin, and A. A. Filchenkov, “Decremental and incremental reshaping of algebraic Bayesian networks global structures,” in *Proc. of the 1st International Scientific Conference Intelligent Information Technologies for Industry”(IITI’16), Advances in Intelligent Systems and Computing*, vol. 451, pp. 57–67, 2016; doi: 10.1007/978-3-319-33816-3_6
5. V. I. Gorodetskii and A. L. Tulupyev, “Generating consistent knowledge bases with uncertainty,” *Journal of Computer and Systems Sciences International*, vol. 36, no 5, pp. 683–691, 1997.
6. A. V. Romanov, D. G. Levenets, A. A. Zolotin, and A. L. Tulupyev, “Incremental synthesis of the tertiary structure of algebraic Bayesian networks,” in *P*roc. 2016 XIX IEEE International Conference on Soft Computing and Measurements (SCM), IEEE, 2016, pp. 28–30; doi: 10.1109/SCM.2016.7519673
7. E. A. Mal’chevskaya, A. I. Berezin, A. A. Zolotin, and A. L. Tulupyev, “Algebraic Bayesian Networks: Local Probabilistic-Logic Inference Machine Architecture and Set of Minimal Joint Graphs,” in *Proc. of the First International Scientific Conference “Intelligent Information Technologies for Industry” (IITI’16), Advances in Intelligent Systems and Computing*, vol. 451, pp. 69–79, 2016; doi: 10.1007/978-3-319-33816-3_7
8. A. A. Filchenkov and A. L. Tulupyev, “Coincidence of the sets of minimal and irreducible join graphs over primary structure of algebraic Bayesian networks,” *Vestnik St. Petersburg University: Mathematics*, vol. 45, no. 2, pp. 106–113, 2012; doi: 10.3103/S1063454112020057
9. A. L. Tulupyev, *Algebraicheskie baiesovskie seti: global’nyi logiko-veroyatnostnyi vyvod v derev’yakh smezhnosti* [Algebraic Bayesian networks: global logical-probabilistic inference in adjacency trees], Moscow: Anatoliya, 2007 (in Russian).

Received 30.12.2019, the final version — 30.01.2020.

Anatolii G. Maksimov, junior researcher, Laboratory of Theoretical and Interdisciplinary Problems of Informatics, SPIIRAS; student, Computer Science Department, SPbU, agm@dscs.pro

Arsenii D. Zavalishin, junior researcher, Laboratory of Theoretical and Interdisciplinary Problems of Informatics, SPIIRAS; student, Computer Science Department, SPbU, adz@dscs.pro

Maxim V. Abramov, PhD, senior researcher, Laboratory of Theoretical and Interdisciplinary Problems of Informatics, SPIIRAS; Associate Professor, Computer Science Department, SPbU, ✉ mva@dscs.pro

Alexander L. Tulupyev, PhD, Dc. Sci., professor, Computer Science Department, SPbU; Principal Researcher, Laboratory of Theoretical and Interdisciplinary Problems of Informatics, SPIIRAS, alt@dscs.pro